

Basis Actuariaal II

Hertentamen 11 Juli 2008

Locatie: C...

Duur: 14-17u

Docent: Katrien Antonio

Instructies:

- het tentamen bestaat uit 6 vragen die ieder 10 punten waard zijn;
- schrijf je antwoorden op het bijgeleverde tentamenpapier;
- vermeld op elke ingeleverde bladzijde je naam en studentnummer;
- er mag een elektronisch rekentool gebruikt worden;
- er wordt een formulier uitgedeeld;
- op bovenstaande na, mogen geen hulpmiddelen gebruikt worden;
- schrijf eventuele opmerkingen voor de docent op je antwoordenblad;
- na afloop van het tentamen wordt een voorbeeldoplossing gepubliceerd op BB;
- veel succes!

1. [10 punten] Voor een speciale, volledig discrete levenslange kapitaalverzekering bij overlijden ('whole life insurance') op (40) geldt:

(i) de uitkering bij overlijden is 1000 gedurende de eerste 20 jaar; 5000 gedurende de volgende 5 jaar en 1000 nadien.

(ii) De jaarlijks te betalen premie is $1000P_{40}$ voor de eerste 20 jaar; $5000P_{40}$ voor de volgende 5 jaar en π nadien.

(iii) We gebruiken de bijgevoegde sterftetafel.

(iv) $i = 0.06$.

Gevraagd:

(a) bereken π ;

(b) bepaal ${}_{21}V$, de reserve aan het eind van jaar 21 voor deze verzekering.

Oplossing: We weten dat voor een levenslange kapitaalverzekering op (40) geldt:

$$1000P_{40} = 1000 \frac{A_{40}}{\ddot{a}_{40}} = \frac{161.32}{14.8166} = 10.89.$$

Voor de onbekende π moet gelden:

- contante waarde van de uitkeringen

$$1000A_{40} + 4000 {}_{20}E_{40} A_{60:\overline{5}|}^1;$$

- contante waarde van de premies

$$1000P_{40}\ddot{a}_{40:\overline{20}|} + 5000P_{40} {}_{20}E_{40}\ddot{a}_{60:\overline{5}|} + \pi {}_{20}E_{40} \times {}_5E_{60} \times \ddot{a}_{65}.$$

Hierbij is

$$\begin{aligned} A_{60:\overline{5}|}^1 &= A_{60} - {}_5E_{60}A_{65} = 0.06674; \\ \ddot{a}_{40:\overline{20}|} &= \ddot{a}_{40} - {}_{20}E_{40}\ddot{a}_{60} = 11.7612; \\ \ddot{a}_{60:\overline{5}|} &= \ddot{a}_{60} - {}_5E_{60}\ddot{a}_{65} = 4.3407. \end{aligned}$$

Gelijkstellen contante waarde premies en uitkeringen, geeft $\pi = 22.32$.

Voor het bepalen van ${}_{21}V$ zijn diverse oplossingen mogelijk. We kunnen bijvoorbeeld eerst ${}_{20}V$ prospectief bepalen. Dit gaat als volgt:

$$\begin{aligned} {}_{20}V &= 4000A_{60:\overline{5}|}^1 + 1000A_{60} - 5000P_{40}\ddot{a}_{60:\overline{5}|} - \pi \times {}_5E_{60} \times \ddot{a}_{65} \\ &= 4000 \times 0.06674 + 369.13 - 5000 \times 0.01089 \times 4.3407 - 22.32 \times 0.68756 \times 9.8969 \\ &= 247.86. \end{aligned}$$

Vervolgens bepalen we ${}_{21}V$ uit ${}_{20}V$ via de gekende recursieformule:

$$\begin{aligned} {}_{21}V &= \frac{({}_{20}V + 5000P_{40})(1+i) - 5000q_{60}}{p_{60}} \\ &= \frac{(247.86 + 5 \times 10.89) \times 1.06 - 5000 \times 0.01376}{1 - 0.01376} = 255. \end{aligned}$$

2. [10 punten] Voor een volledig discrete tijdelijke kapitaalverzekering (duur 20 jaar) bij overlijden op (40) is het verzekerd kapitaal 1000 en worden gedurende 10 jaar premies betaald. Gegeven is:

- (i) $i = 0.06$;
- (ii) We gebruiken de bijgevoegde sterftetafel.
- (iii) Volgend kostenschema moet in rekening gebracht worden. De kosten dienen steeds vergoed te worden aan het begin van elk polisjaar.

	Jaar 1		Jaar ≥ 2	
	% van premie	constant	% van premie	constant
Taks	4%	0	4%	0
Commissieloon	25%	0	5%	0
Beheerskost	0%	10	0%	5

[Let op: ‘taks’ en ‘commissieloon’ dienen betaald te worden zolang er premiebetaling is. ‘Beheerskosten’ dienen betaald te worden gedurende de looptijd van het contract, zolang (40) in leven is.]

Bepaal op basis van actuariële equivalentie de premie bij dit contract. De premie moet de bovenstaande kosten in rekening brengen.

Oplossing: Noteer de gezochte premie met G . Er moet dan gelden:

$$\begin{aligned} G\ddot{a}_{40:\overline{10}|} &= 1000A_{\overline{1}|40:\overline{20}|} + 0.04G\ddot{a}_{40:\overline{10}|} + 0.25G + 0.05Ga_{40:\overline{9}|} + 10 + 5a_{40:\overline{19}|} \\ &= 1000A_{\overline{1}|40:\overline{20}|} + 0.04G\ddot{a}_{40:\overline{10}|} + 0.2G + 0.05G\ddot{a}_{40:\overline{10}|} + 10 + 5a_{40:\overline{19}|}. \end{aligned}$$

Dan wordt

$$\begin{aligned} G &= \frac{1000A_{\overline{1}|40:\overline{20}|} + 5 + 5\ddot{a}_{40:\overline{20}|}}{0.91\ddot{a}_{40:\overline{10}|} - 0.2} \\ &= \frac{1000(A_{40} - {}_{20}E_{40}A_{60}) + 5 + 5(\ddot{a}_{40} - {}_{20}E_{40}\ddot{a}_{60})}{0.91(\ddot{a}_{40} - {}_{10}E_{40}\ddot{a}_{50}) - 0.2} \\ &= 18.21. \end{aligned}$$

3. [10 punten] Voor een speciale, volledig continue levenslange kapitaalverzekering bij overlijden op (x) geldt:

- (i) verzekerd kapitaal is 1;
- (ii) sterfte volgt een dubbel decrement model;
- (iii) de uitkering bij overlijden omwille van oorzaak 1 is 3;
- (iv) de uitkering bij overlijden omwille van oorzaak 2 is 1;
- (v) $\mu_x^{(1)}(t) = 0.02, \quad t \geq 0$;
- (vi) $\mu_x^{(2)}(t) = 0.04, \quad t \geq 0$;
- (vii) de interestintensiteit δ is constant.

Bereken de premie (constant en continu betaalbaar) bij dit contract. Gebruik daarvoor het principe van actuariële equivalentie.

Oplossing: we stellen de contante waarde van de premies gelijk aan de contante waarde van de uitkeringen. Hierbij is

- contante waarde premies:

$$\begin{aligned} \bar{P}\bar{a}_x &= \bar{P} \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_t p_x dt \\ &= \bar{P} \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-\mu_x^{(\tau)} t} dt \\ &= \bar{P} \frac{1}{\delta + \mu_x^{(\tau)}}; \end{aligned}$$

- contante waarde van de uitkeringen:

$$\begin{aligned}\bar{A}_x &= \int_0^\infty 3e^{-\delta t} e^{-(\mu_x^{(1)} + \mu_x^{(2)})t} \mu_x^{(1)} dt + \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-(\mu_x^{(1)} + \mu_x^{(2)})t} \mu_x^{(2)} dt \\ &= \frac{3\mu_x^{(1)}}{\delta + \mu_x^{(\tau)}} + \frac{\mu_x^{(2)}}{\delta + \mu_x^{(2)}} \\ &= \frac{3(0.02) + 0.04}{\delta + \mu_x^{(\tau)}} = \frac{0.1}{\delta + \mu_x^{(\tau)}}.\end{aligned}$$

Dan wordt uiteindelijk

$$\bar{P} = \frac{\frac{0.1}{\delta + \mu_x^{(\tau)}}}{\frac{1}{\delta + \mu_x^{(\tau)}}} = 0.1.$$

4. Onderstel onafhankelijkheid tussen A en B . A en B zijn beiden 62 jaar oud. A is een nieuw geselecteerd leven ('newly selected life'), terwijl B geselecteerd werd op 61-jarige leeftijd. Wat is dan de kans dat voor het koppel A en B het tweede overlijden zal plaatsvinden tussen 2 en 3 jaar vanaf heden? Gebruik onderstaande tabel:

x	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	q_{x+2}	$x+2$
60	0.08	0.14	0.22	62
61	0.09	0.2	0.25	63
62	0.1	0.2	0.3	64

Oplossing: de gevraagde kans wordt gegeven door

$${}_3q_{[62]:[61]+1}^{-2} q_{[62]:[61]+1} = {}_3q_{[62]} {}_3q_{[61]+1}^{-2} q_{[62]} {}_2q_{[61]+1},$$

waarbij ${}_3q_{[62]} = (1 - {}_3p_{[62]}) = 1 - p_{[62]} p_{[62]+1} p_{[62]+2} = 1 - 0.9 \times 0.8 \times 0.7 = 0.496$ en ${}_3q_{[61]+1} = 1 - p_{[61]+1} p_{[61]+2} p_{[61]+3} = 1 - 0.8 \times 0.75 \times 0.7 = 0.58$. Bovendien, ${}_2q_{[62]} = 1 - {}_2p_{[62]} = 1 - p_{[62]} p_{[62]+1} = 1 - 0.9 \times 0.8 = 0.28$ en ${}_2q_{[61]+1} = 1 - {}_2p_{[61]+1} = 1 - p_{[61]+1} p_{[61]+2} = 1 - 0.8 \times 0.75 = 0.4$. De gevraagde kans wordt dan $0.496 \times 0.58 - 0.28 \times 0.4 = 0.176$.

5. Een 1-jaar uitgestelde lijfrente op (x) met duur 1 jaar zorgt voor continue betalingen tussen $t = 1$ en $t = 2$, gegeven dat (x) in leven is. De betalingsintensiteit op tijdstip $1+t$ is gegeven door $e^{0.1t}$ met $0 \leq t \leq 1$. Deze lijfrente wordt aangekocht via een eenmalige premie. Bij overlijden gedurende het eerste jaar wordt de premie zonder interest teruggestort op het moment van overlijden. Gegeven is dat $q_x = 0.1$, $q_{x+1} = 0.2$ en de interestintensiteit δ is constant 0.1. Onderstel UDD. Bepaal de eenmalige premie.

[Hint: UDD houdt in ${}_tq_x = tq_x$ voor elk natuurlijk getal x en $0 < t < 1$.]

Oplossing: de contante waarde van de uitkeringen gedaan door de lijfrente is gegeven

door:

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 e^{0.1t} v(t+1) {}_{t+1}p_x dt \\
 &= p_x \int_0^1 e^{0.1t} e^{-\delta(t+1)} (1 - tq_{x+1}) dt \\
 &= 0.9 \int_0^1 e^{0.1t} e^{-0.1t} e^{-0.1} (1 - t0.2) dt \\
 &= 0.9e^{-0.1} \int_0^1 (1 - t0.2) dt \\
 &= 0.9e^{-0.1} (1 - 0.2/2) \\
 &= 0.81e^{-0.1}.
 \end{aligned}$$

De contante waarde van de uitkeringen bij overlijden wordt (onder UDD): $\mu_x(t) {}_t p_x = -\frac{d}{dt} {}_t p_x = -\frac{d}{dt} (1 - tq_x) = q_x$

$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 P {}_t p_x \mu_x(t) e^{-\delta t} dt \\
 &= P \int_0^1 e^{-0.1t} q_x dt \\
 &= \frac{0.1P}{-0.1} \exp(-0.1t) \Big|_0^1 \\
 &= -P \exp(-0.1t) \Big|_0^1 = P(1 - \exp(-0.1)).
 \end{aligned}$$

Dus wordt

$$\begin{aligned}
 P &= e^{-0.1} 0.81 + P[1 - \exp(-0.1)] \\
 &= e^{-0.1} 0.81 + P - P \exp(-0.1) \\
 &= 0.81.
 \end{aligned}$$

6. [10 punten] Gegeven is:

- (i) $q_x^{(1)} = 0.1$;
- (ii) $q_{x+1}^{(2)} = 0.25$;
- (iii) $\mu_x^{(2)} = 0.2$;
- (iv) $\mu_{x+1}^{(1)} = 0.15$.

Bepaal nu ${}_{1|1}q_x^{(2)}$ voor deze 2-voudige decrement tafel.

Oplossing: We weten dat ${}_{1|1}q_x^{(2)} = p_x^{(\tau)} q_{x+1}^{(2)}$. Bepalen we nu achtereenvolgens $p_x^{(\tau)}$ en $q_{x+1}^{(2)}$.

- Voor $p_x^{(\tau)}$ krijgen we:

$$\begin{aligned}
 p_x^{(\tau)} &= (1 - q_x^{(1)}) e^{-\mu_x^{(2)}} \\
 &= (1 - 0.1) e^{-0.2} = 0.7369.
 \end{aligned}$$

- Voor $q_{x+1}^{(2)}$ krijgen we:

$$\begin{aligned}q_{x+1}^{(2)} &= \int_0^1 t p_{x+1}^{(\tau)} \mu_{x+1}^{(2)} dt \\&= \int_0^1 e^{-(\mu_{x+1}^{(1)} + \mu_{x+1}^{(2)})t} \mu_{x+1}^{(2)} dt \\&= \int_0^1 e^{-(0.15 + 0.2877)t} \times 0.2877 dt \\&= 0.233.\end{aligned}$$

Hierbij gebruikten we

$$\mu_{x+1}^{(2)} = -\log(1 - q_{x+1}'^{(2)}) = -\log(0.75) = 0.2877.$$

Dan wordt de gevraagde kans:

$${}_{1|1}q_x^{(2)} = p_x^{(\tau)} q_{x+1}^{(2)} = 0.7369 \times 0.233 = 0.172.$$