

Basis Actuarie II

Tentamen 11 Juni 2008

Locatie: AB40

Duur: 14-17u

Docent: Katrien Antonio

Instructies:

- het tentamen bestaat uit 6 vragen die ieder 10 punten waard zijn;
- schrijf je antwoorden op het bijgeleverde tentamenpapier;
- vermeld op elke ingeleverde bladzijde je naam en studentnummer;
- er mag een elektronisch rekentoestel gebruikt worden;
- er wordt een formulier uitgedeeld;
- op bovenstaande na, mogen geen hulpmiddelen gebruikt worden;
- schrijf eventuele opmerkingen voor de docent op je antwoordenblad;
- vul het evaluatie-formulier in alvorens de zaal te verlaten;
- na afloop van het tentamen wordt een voorbeeldoplossing gepubliceerd op BB;
- veel succes!

1. Voor een speciale, volledig discrete, gemengde verzekering ('endowment insurance') op (40) met duur 20 jaar is het onderstaande gegeven.

- De uitkering bij overlijden is 1000 gedurende de eerste 10 jaar van het contract en 2000 nadien. De betaling gebeurt aan het eind van het jaar van overlijden. Indien de verzekerde op $t = 20$ nog in leven is, wordt een bedrag groot 2000 uitgekeerd.
- De jaarlijks te betalen premie, bepaald op basis van actuariële equivalentie, is 40 gedurende de eerste 10 jaar en 100 voor elk jaar nadien.
- $q_{40+k} = 0.001k + 0.001$ ($k = 8, 9, \dots, 13$).
- $i = 0.05$
- $\ddot{a}_{51:\overline{9}|} = 7.1$

Bereken nu ${}_{10}V$.

Oplossing

We starten vanuit de reserve voor jaar 11 voor een gemengde verzekering:

$$\begin{aligned} {}_{11}V &= 2000A_{40+11:20-11} - 100\ddot{a}_{40+11:20-11} \\ &= 2000A_{51:9} - 100\ddot{a}_{51:9}. \end{aligned}$$

Vanuit de relatie $A_{51:9} = 1 - d\ddot{a}_{51:9}$ en $d = i/(1+i)$ vinden we

$$\begin{aligned} A_{51:9} &= 1 - \left(\frac{0.05}{1.05}\right) 7.1 \\ &= 0.6619. \end{aligned}$$

Dit leidt tot ${}_{11}V = 613.81$. Hieruit berekenen we ${}_{10}V$ als volgt

$$\begin{aligned} {}_{11}V &= ({}_{10}V + \pi_{10})(1+i) - q_{40+10}(b_{10} - {}_{11}V) \\ &\Downarrow \\ {}_{10}V &= [{}_{11}V + q_{50}(b_{10} - {}_{11}V)](1+i)^{-1} - \pi_{10} \\ &= [613.81 + (0.001 \times 10 + 0.001)(2000 - 613.81)](1+0.05)^{-1} - 100 \\ &= 499.1. \end{aligned}$$

2. Onderstel constante interestintensiteit δ . Formuleer en bewijs Thiele's differentiaal vergelijking voor een kapitaalverzekering bij leven ('pure endowment') op een leven (x) met duur n jaar en verzekerd kapitaal groot 1. Het kapitaal wordt dus enkel uitgekeerd indien (x) nog in leven is aan het eind van de duur van het contract (dwz op $t = n$). Er wordt een eenmalige premie betaald bij aanvang van het contract (die bepaald is op basis van actuariële equivalentie). Geef ook de randvoorwaarden horende bij deze differentiaalvergelijking.

Oplossing

Thiele's differentiaal vergelijking gaat als volgt

$$\frac{d}{dt} {}_t\bar{V} = {}_t\bar{V}\delta + \mu_{x+t} {}_t\bar{V},$$

met randvoorwaarden ${}_0\bar{V} = 0$ en ${}_n\bar{V} = 1$. Voor dit contract hebben we

$$\begin{aligned} {}_t\bar{V} &= A_{x+t:n-t|} \\ &= e^{-\delta(n-t)} {}_{n-t}p_{x+t}. \end{aligned}$$

De vergelijking kan dan bewezen worden door:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} {}_t\bar{V} &= \delta e^{-\delta(n-t)} {}_{n-t}p_{x+t} + e^{-\delta(n-t)} \frac{d}{dt} ({}_{n-t}p_{x+t}) \\ &= {}_t\bar{V}\delta + e^{-\delta(n-t)} \frac{d}{dt} \left(\frac{{}_np_x}{{}_tp_x} \right) \\ &= {}_t\bar{V}\delta + e^{-\delta(n-t)} {}_np_x \frac{-1}{{}_tp_x^2} (-{}_tp_x \mu_{x+t}) \\ &= {}_t\bar{V}\delta + e^{-\delta(n-t)} \left(\frac{{}_np_x}{{}_tp_x} \right) \mu_{x+t} \\ &= {}_t\bar{V}\delta + \mu_{x+t} {}_t\bar{V}. \end{aligned}$$

3. [10 punten] In een bepaalde populatie geldt voor alle leeftijden x dat de sterfte-intensiteit voor niet-rokers op een bepaalde leeftijd gelijk is aan de helft van de sterfte-intensiteit voor rokers met dezelfde leeftijd. Voor niet-rokers weten we: $\ell_x = 500(110 -$

x), $0 \leq x \leq 110$. ω is hier 110.

Bereken dan ${}^{\circ}e_{20:25}$ voor een roker (20) en een niet-roker (25). Onderstel dat hun levensloopen onafhankelijk zijn. Geef ook de betekenis van ${}^{\circ}e_{20:25}$ in woorden.

Oplossing

Gegeven is $\mu_x^{\text{NS}} = \frac{1}{2}\mu_x^{\text{S}}$ voor alle x . Daaruit volgt

$$\begin{aligned} {}_t p_x^{\text{NS}} &= \exp - \int_0^t \mu_x^{\text{NS}}(r) dr \\ &= \exp - \int_0^t \frac{1}{2} \mu_x^{\text{S}}(r) dr \\ &= ({}_t p_x^{\text{S}})^{1/2}. \end{aligned}$$

Verder weten we dat $\ell_x^{\text{NS}} = 500(110 - x)$ voor $0 \leq x \leq 100$, dus

$$\begin{aligned} {}_t p_x^{\text{NS}} &= \frac{\ell_{x+t}^{\text{NS}}}{\ell_x^{\text{NS}}} \\ &= \frac{500(110 - x - t)}{500(110 - x)} = 1 - \frac{t}{110 - x}. \end{aligned}$$

Om de complete levensverwachting van 20 : 25 te berekenen, dienen we uit te rekenen

$$\begin{aligned} {}^{\circ}e_{20:25} &= \int_0^{\min(110-20, 110-25)} {}_t p_{20:25} dt \\ &= \int_0^{85} {}_t p_{20}^{\text{S}} {}_t p_{25}^{\text{NS}} dt \\ &= \int_0^{85} \left(1 - \frac{t}{110 - 20}\right)^2 \left(1 - \frac{t}{85}\right) dt \\ &= \frac{1}{90^2 \times 85} \int_0^{85} (90 - t)^2 (85 - t) dt \\ &= 22.0589. \end{aligned}$$

4. [10 punten] Een continue lijfrente op twee levens (30) en (40) voorziet in de volgende betalingen:

- een bedrag groot 100 zolang (30) en (40) allebei in leven zijn,
- een bedrag groot 70 zolang (30) in leven is, maar (40) is overleden, en
- een bedrag groot 50 zolang (40) in leven is, maar (30) is overleden.

De actuariële contante waarde van de hierboven beschreven lijfrente is 1180. Verder is $100\bar{a}_{30} = 1200$ en $100\bar{a}_{40} = 1000$.

Bereken dan de actuariële contante waarde van een continue lijfrente op twee levens, (30) en (40), die een bedrag groot 100 uitkeert, zolang tenminste één van hen in leven is. Gebruik het gepaste actuariële symbool om deze contante waarde te noteren.

Oplossing

Gegeven is

$$70\bar{a}_{30} + 50\bar{a}_{40} - 20\bar{a}_{30:40} = 1180.$$

Bovendien weten we: $100\bar{a}_{30} = 1200 \Rightarrow \bar{a}_{30} = 12$ en $100\bar{a}_{40} = 1000 \Rightarrow \bar{a}_{40} = 10$.
Bijgevolg vinden we

$$\bar{a}_{30:40} = \frac{70 \times 12 + 50 \times 10 - 1180}{20} = 8.$$

Dit geeft dan

$$\begin{aligned} 100\bar{a}_{\overline{30:40}} &= 100\bar{a}_{30} + 100\bar{a}_{40} - 100\bar{a}_{30:40} \\ &= 1400. \end{aligned}$$

5. (a) Voor een volledig discrete tijdelijke kapitaalsverzekering bij overlijden op (40) met duur 3 jaar en verzekerd kapitaal groot 1000 is volgende MDT ('multiple decrement tafel') gegeven.

x	$\ell_x^{(\tau)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$
40	2000	20	60
41	?	30	50
42	?	40	?

De verzekering die we beschouwen betaalt niets uit indien (x) de beschouwde groep verlaat omwille van decrement 2. Indien (x) de groep verlaat omwille van decrement 1 wordt het verzekerd kapitaal groot 1000 uitbetaald aan het eind van het jaar. Onderstel $i = 0.05$. Bereken nu de jaarlijks te betalen netto premie voor deze verzekering. Premies blijven constant over de jaren heen.

(b) In een model met twee decrements geldt:

- in de enkelvoudige decrement tafel (ASDT: 'associated single decrement table') horende bij oorzaak (1) is $q_{40}^{(1)} = 0.1$ en de UDD assumptie geldt;
- in de enkelvoudige decrement tafel die hoort bij oorzaak (2) is $q_{40}^{(2)} = 0.125$. Voor oorzaak (2) geldt dat falen enkel en alleen kan plaatsvinden op $t = 0.7$.

Bereken nu $q_{40}^{(2)}$.

Oplossing

(a) Er geldt $\ell_{41}^{(\tau)} = \ell_{40}^{(\tau)} - d_{40}^{(1)} - d_{40}^{(2)} = 2000 - 20 - 60 = 1920$. Verder is $\ell_{42}^{(\tau)} = 1920 - 30 - 50 = 1840$. Noteer de gezocht premie met P , dan geldt

- de actuariële contante waarde van de premies

$$\begin{aligned} P \left(1 + p_{40}^{(\tau)} v + {}_2 p_{40}^{(\tau)} v^2 \right) &= P \left(1 + \frac{1920}{2000} v + \frac{1920}{2000} \frac{1840}{1920} v^2 \right) \\ &= 2.749P \end{aligned}$$

- de actuarieel contante waarde van de uitkeringen

$$\begin{aligned}
 & 1000 \left(q_{40}^{(1)} v + p_{40}^{(\tau)} q_{40+1}^{(1)} v^2 + {}_2 p_{40}^{(\tau)} q_{40+2}^{(1)} v^3 \right) \\
 = & 1000 \left(\frac{20}{2000} v + \frac{1920}{2000} \frac{30}{1920} v^2 + \frac{1920}{2000} \frac{1840}{1920} \frac{40}{1840} v^3 \right) \\
 = & 40.41.
 \end{aligned}$$

Dan is $P = 14.7$.

(b) $q_{40}^{(2)}$ uit de MDT betekent dat (40) de tafel binnen het jaar moet verlaten en dit omwille van oorzaak 2. Oorzaak 2 moet dus als eerste optreden. Aangezien oorzaak 2 enkel op $t = 0.7$ optreedt, wordt de gevraagde kans

$$\begin{aligned}
 q_{40}^{(2)} &= (1 - {}_{0.7} q_{40}^{(1)}) \times q_{40}^{\prime(2)} \\
 &= (1 - 0.7 \times 0.1) 0.125 \\
 &= 0.11625.
 \end{aligned}$$

Immers, oorzaak 2 moet optreden op $t = 0.7$ (met kans $q_{40}^{\prime(2)}$) en oorzaak 1 mag niet optreden tussen $t = 0$ en $t = 0.7$.

6. Beantwoord kort en bondig volgende vragen:

- geef in woorden de betekenis van \bar{A}_{yx} ;
- schets de sterfte-intensiteit van de Nederlandse bevolking (leeftijd x op horizontale as en $\ln \mu_x$ op verticale as);
- schets het verloop van de reserve voor een gemengde verzekering ('endowment insurance') (verzekerd kapitaal groot 1, duur 30 jaar) bij koopsombetaling enerzijds en jaarlijkse premiebetaling anderzijds. Geef ook het internationale symbool om deze reserve aan te duiden.

Oplossing: zie de transparanten die horen bij de colleges.