Basis Actuariaat II

Tentamen 27 Januari 2009

Locatie: IWO yellow
Duur: 9-12u
Docent: Katrien Antonio

Instructies:

- schrijf je antwoorden op het bijgeleverde tentamenpapier;
- vermeld op elke ingeleverde bladzijde je naam en studentnummer;
- op een elektronisch rekentoestel en het formularium na mogen er geen hulpmiddelen gebruikt worden;
- schrijf eventuele opmerkingen voor de docent op je antwoordenblad;
- veel succes!

[10 punten]

1. In een dubbel decrement model waar oorzaak (d) staat voor overlijden en (w) voor stopzetten van het contract, is gegeven:

   - sterfte is uniform verdeeld over elk jaar in de enkelvoudige decrement tafel ('ASDT': associated single decrement table);
   - stopzetten van het contract gebeurt enkel aan het eind van een levensjaar;
   - $\ell_{30}^{(\tau)} = 1000$;
   - $q_{30}^{(w)} = 0.35$;
   - $d_{30}^{(d)} = 0.55 d_{30}^{(w)}$.

   Bepaal dan $p_{30}^{\prime(w)}$. Leg uit in woorden wat dit symbool betekent.

Opl. Aangezien stopzetten van het contract enkel kan plaatsvinden aan het eind van een levensjaar, geldt:

$$\begin{aligned} q_{30}^{(w)} &= (1 - q_{30}^{\prime(d)}) q_{30}^{\prime(w)} \\ &\Downarrow \\ q_{30}^{\prime(w)} &= \frac{q_{30}^{(w)}}{1 - q_{30}^{\prime(d)}} = \frac{0.35}{1 - q_{30}^{\prime(d)}}. \end{aligned}$$

Verder is (wegens uniformiteit)

$$\begin{aligned} q_{30}^{(d)} &= \int_0^1 {}_s p_{30}^{(\tau)} \mu_{30+s}^{(d)} ds \\ &= q_{30}^{\prime(d)} \left(1 - \frac{1}{2} q_{30}^{\prime(w)}\right). \end{aligned}$$

Dit betekent:

$$\frac{d_{30}^{(d)}}{\ell_{30}^{(\tau)}} = \frac{d_{30}^{(d)}}{d_{30}^{(w)}}\frac{d_{30}^{(w)}}{\ell_{30}^{(\tau)}} = 0.55 q_{30}^{(w)} = 0.55 \times 0.35 = 0.1925.$$

Verder weten we

$$p_{30}^{(\tau)} = 1 - q_{30}^{(d)} - q_{30}^{(w)} = 1 - 0.1925 - 0.35 = 0.4575.$$

Dan is

$$\begin{aligned} p_{30}^{'(d)} p_{30}^{'(w)} &= p_{30}^{'(d)} \left(1 - \frac{0.35}{p_{30}^{'(d)}}\right) \\ &= p_{30}^{'(d)} - 0.35 = 0.4575, \end{aligned}$$

dus $p_{30}^{'(d)} = 0.8075$. Uiteindelijk geeft dit

$$q_{30}^{'(w)} = \frac{0.35}{p_{30}^{'(d)}} = \frac{0.35}{0.8075} = 0.4334.$$

Dus: $p_{30}^{'(w)} = 1 - 0.4334 = 0.5666$.

[10 punten] 2. Onderstel constante interestintensiteit δ. Formuleer en bewijs Thiele's differentiaal vergelijking voor een kapitaalverzekering bij leven ('pure endowment') op een leven (x) met duur n jaar en verzekerd kapitaal groot 1. Het kapitaal wordt dus enkel uitgekeerd indien (x) nog in leven is aan het eind van de duur van het contract (dwz op $t = n$). Er wordt een eenmalige premie betaald bij aanvang van het contract (die bepaald is op basis van actuariële equivalentie). Geef ook de randvoorwaarden horende bij deze differentiaalvergelijking.

Oplossing

Thiele's differentiaal vergelijking gaat als volgt

$$\frac{d}{dt}\,{}_t\bar{V} = {}_t\bar{V}\delta + \mu_{x+t}\,{}_t\bar{V},$$

met randvoorwaarden ${}_0\bar{V} = 0$ en ${}_n\bar{V} = 1$. Voor dit contract hebben we

$$\begin{aligned} {}_t\bar{V} &= A_{\substack{\quad 1 \\ x+t:\overline{n-t}|}} \\ &= e^{-\delta(n-t)}\,{}_{n-t}p_{x+t}. \end{aligned}$$

De vergelijking kan dan bewezen worden door:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\,{}_t\bar{V} &= \delta e^{-\delta(n-t)}\,{}_{n-t}p_{x+t} + e^{-\delta(n-t)}\frac{d}{dt}({}_{n-t}p_{x+t}) \\ &= {}_t\bar{V}\delta + e^{-\delta(n-t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{{}_np_x}{{}_tp_x}\right) \\ &= {}_t\bar{V}\delta + e^{-\delta(n-t)}\,{}_np_x\frac{-1}{{}_tp_x^2}(-{}_tp_x\mu_{x+t}) \\ &= {}_t\bar{V}\delta + e^{-\delta(n-t)}\left(\frac{{}_np_x}{{}_tp_x}\right)\mu_{x+t} \\ &= {}_t\bar{V}\delta + \mu_{x+t}\,{}_t\bar{V}. \end{aligned}$$

[3 punten] 3. (a) Voor onafhankelijke levens (x) en (y) geldt:

(i) $q_x = 0.05$;

(ii) $q_y = 0.1$;

(iii) UDD assumptie geldt voor (x) en (y).

Wat is de betekenis van ${}_{0.75}q_{xy}$? Reken uit.

Opl. Wegens UDD weten we dat het volgende geldt:

$$\begin{aligned} {}_{0.75}p_x &= 1 -{}_{0.75}\, q_x \\ &= 1 - 0.75 \times 0.05 = 0.9625; \\ {}_{0.75}p_y &= 1 - 0.75 \times 0.1 \\ &= 0.925. \end{aligned}$$

Wegens onafhankelijkheid van (x) en (y) geldt vervolgens:

$$\begin{aligned} {}_{0.75}q_{xy} &= 1 -{}_{0.75}\, p_{xy} \\ &= 1 - ({}_{0.75}p_x)({}_{0.75}p_y) \\ &= 0.1097. \end{aligned}$$

[7 punten] (b) Een continue lijfrente op 2 levens betaalt:

- jaarlijks 100 zolang (30) en (40) allebei in leven zijn;
- jaarlijks 70 zolang (30) in leven is, maar (40) is overleden;
- jaarlijks 50 zolang (40) in leven is, maar (30) is overleden.

De actuarieel contante waarde van deze lijfrente is 1180. Continue lijfrenten op één leven die jaarlijks 100 uitbetalen zijn beschikbaar voor (30) en (40) met contante waarden van 1200 en 1000, respectievelijk.

Bepaal nu de actuarieel contante waarde van een continue lijfrente op 2 levens ((30) en (40)) die jaarlijks 100 uitbetaalt zolang minstens één van hen in leven is. Geef het gepaste actuariële symbool om deze contante waarde uit te drukken.

Opl. We weten dat

$$70\bar{a}_{30} + 50\bar{a}_{40} - 20\bar{a}_{30:40} = 1180.$$

Eveneens geldt

$$\begin{aligned} 100\bar{a}_{30} &= 1200 \\ 100\bar{a}_{40} &= 1000. \end{aligned}$$

Dus, $\bar{a}_{30:40} = \frac{70\times12+50\times10-1180}{20} = 8$. Dan volgt:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{\overline{30:40}} &= \bar{a}_{30} + \bar{a}_{40} - \bar{a}_{30:40} \\ &= 12 + 10 - 8 = 14. \end{aligned}$$

Dan is $100\bar{a}_{\overline{30:40}} = 1400$.

4. Gebruik de sterftewet van Demoivre: ${}_tp_x = 1 - \frac{t}{\omega - x}$ (voor $0 \leq t \leq \omega - x$). Neem $\omega = 100$. Onderstel constante rente $i = 0.06$.

[10 punten]

(a) Geef numerieke uitkomst voor $\overline{P}(\bar{A}_{35})$;

(b) Leid een uitdrukking af voor ${}_t\bar{V}(\bar{A}_{35})$.

Opl. (a) De gevraagde premie kan uitgedrukt worden als volgt:

$$\overline{P}(\bar{A}_{35}) = \frac{\bar{A}_{35}}{\bar{a}_{35}}.$$

Hierbij is

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{35} &= \int_0^{65} e^{-\delta t}\ {}_tp_{35}\mu_{35}(t)dt \\
&= \int_0^{65} e^{-\delta t}\left(\frac{65-t}{65}\right)\frac{1}{65-t}dt \\
&= \int_0^{65} \frac{1}{65}(1.06)^{-t}dt \\
&= \frac{-1}{65\ln(1.06)}\left[1.06^{-65} - 1\right] \\
&= \frac{-1}{65\ln v}\left[1 - v^{65}\right] \\
&= 0.258047.
\end{aligned}$$

Verder geldt

$$\bar{a}_{35} = \frac{1 - \bar{A}_{35}}{\delta}.$$

Dus wordt de gevraagde premie uiteindelijk gegeven door

$$\overline{P}(\bar{A}_{35}) = \frac{\delta \bar{A}_{35}}{1 - \bar{A}_{35}} = 0.020266.$$

(b) Voor de reserves vinden we:

$${}_t\bar{V}_{35} = \overline{A}_{35+t} - \bar{P}\bar{a}_{35+t}.$$

Hierbij is ${}_sp_{35+t} = 1 - \frac{s}{65-t}$ en $\mu_{35+t}(s) = \frac{1}{65-t-s}$. Bijgevolg is

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{35+t} &= \int_0^{65-t} e^{-\delta s}\frac{65-t-s}{65-t}\frac{1}{65-t-s}ds \\
&= \frac{1}{65-t}\int_0^{65-t} e^{-\delta s}ds.
\end{aligned}$$

Verder is $\bar{a}_{35+t} = \frac{1-\bar{A}_{35+t}}{\log(1.06)}$. De reserve wordt dan uiteindelijk gegeven door

$${}_t\bar{V}_{35} = \bar{A}_{35+t} - 0.020266\frac{1 - \bar{A}_{35+t}}{\log(1.06)}.$$

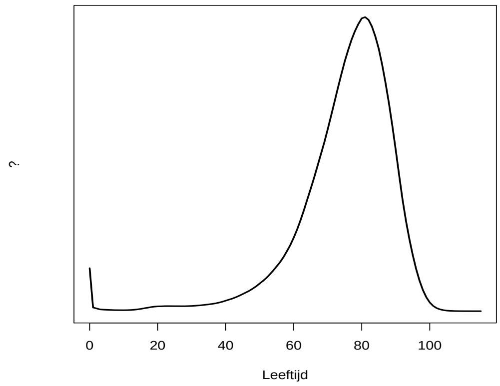

Figure 1: *Welke functie, gerelateerd aan menselijke sterfte, wordt voorgesteld in deze grafiek?*

5. Figuur 1 is gemaakt op basis van de meest recente sterftetafel voor mannen, uitgegeven door het AG/AI. Van de gegeven functies wordt juist één voorgesteld door de gegeven figuur. Welke? Leg voor elk van de andere functies uit waarom deze niet voorgesteld kunnen worden door de figuur.

[10 punten]

De mogelijkheden zijn: (met x voor 'Leeftijd')

(a) μ_x;
(b) $\ell_x \mu_x$;
(c) $\ell_x p_x$;
(d) ℓ_x.

Opl. Juiste antwoord is (b): $\ell_x \mu_x$. De andere mogelijkheden worden hieronder voorgesteld:

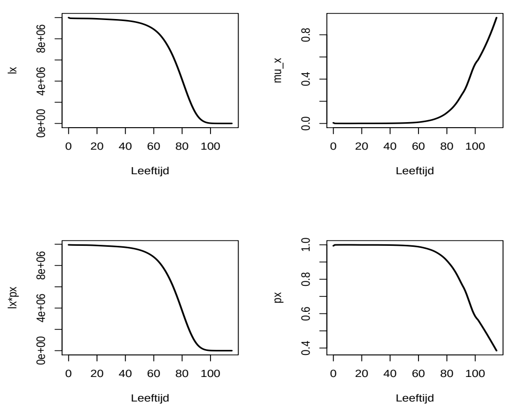

Figure 2: *Voorstelling van ℓ_x, μ_x, $\ell_x p_x$ en p_x.*