TENTAMEN BASIS ACTUARIAAT 2

16 juni 2006, 14.00-17.00 uur

Noteer op al uw in te leveren papieren uw **naam** en **collegekaartnummer**.

Beoordeling: Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven. Bij elke (deel)opgave wordt er aangegeven hoeveel punten er maximaal kunnen worden behaald. In totaal kunt u 70 punten behalen.

Uitslag: Het tentamencijfer wordt binnen 18 werkdagen officieel bekend gemaakt door de onderwijsadministratie. Zodra de tentamens zijn nagekeken worden de resultaten ook op Blackboard bekend gemaakt.

Duur: Dit tentamen duurt **3 uur**.

Hulpmiddelen: Dit is een gesloten boek tentamen. Het gebruik van een (niet-programmeerbare) rekenmachine is toegestaan.

Opmerking: Tenzij uitdrukkelijk anders vermeld, geldt voor alle opgaven dat leeftijden en duren (dus x, n en m) geheel zijn. Verder geldt $x \geq 0$, $n \geq 1$ en $m \geq 1$. Voor de interestvoet i geldt altijd $i > 0$.

Opgave 1 (10 punten)
Toon aan voor de verzekering waarvoor $a_{x:\overline{n}|}$ het netto koopsomsymbool is dat de uitdrukking voor de netto koopsom verkregen met behulp van de geaggregeerde betalingsmethode gelijk is aan de uitdrukking verkregen met behulp van de lopende betalingsmethode.

Opgave 2 (10 punten)
Zij Y_1 de stochast voor de contante waarde van de uitkering voor de verzekering waarvoor $a_{x:\overline{n}|}$ het netto koopsomsymbool is. Zij Y_2 de stochast voor de contante waarde van de uitkering voor de verzekering waarvoor ${}_{n|}a_x$ het netto koopsomsymbool is. Geef een uitdrukking voor de covariantie $\mathrm{Cov}[Y_1, Y_2]$ in bekende netto koopsomsymbolen; zoals welbekend geldt dat $\mathrm{Cov}[Y_1, Y_2] = \mathrm{E}[Y_1 Y_2] - \mathrm{E}[Y_1]\mathrm{E}[Y_2]$. Laat zien dat $\mathrm{Cov}[Y_1, Y_2] > 0$ en geef hiervoor een verklaring (in woorden).

Opgave 3 (10 punten)
Beschouw de lijfrente in termijnen waarvoor ${}_{1/2|}\ddot{a}_x^{(12)}$ het netto koopsomsymbool is. Er geldt dat ${}_{1/2|}\ddot{a}_x^{(12)} = \ddot{a}_x^{(12)} - \ddot{a}_{x:\overline{1/2}|}^{(12)}$. Om het rechterlid van de laatste uitdrukking nader te bepalen, benaderen we $\ddot{a}_{x:\overline{1/2}|}^{(12)}$ onder de aanname van uniforme sterfte binnen het jaar. Bepaal X in de volgende uitdrukking voor $\ddot{a}_{x:\overline{1/2}|}^{(12)}$, onder de aanname van uniforme sterfte binnen het jaar:

$$\ddot{a}_{x:\overline{1/2}|}^{(12)} = \ddot{a}_{\overline{1/2}|}^{(12)} - X\left(I^{(12)}a\right)_{\overline{5/12}|}.$$

Hierbij is $\left(I^{(p)}a\right)_{\overline{k/p}|}$, $k=1,2,...$, het netto koopsomsymbool voor de postnumerando stijgende annuïteit in p termijnen die j/p uitkeert op tijdstip j/p, $j = 1,...,k$.

Opgave 4 (15 punten)
We beschouwen een bijzondere gemengde verzekering. De verzekering is gesloten op het leven van een x-jarige en heeft een duur van n jaar. Het verzekerd kapitaal bij in leven zijn op de einddatum is 1. De jaarlijkse netto premie duiden we aan met P; deze is prenumerando jaarlijks verschuldigd tot overlijden en maximaal gedurende m jaar, $0 < m < n$. Bij overlijden voor de einddatum wordt aan het eind van het overlijdensjaar als verzekerd kapitaal uitgekeerd v^{n-k-1} (bij overlijden in verzekeringsjaar $k + 1$, $k = 0,1,\ldots, n-1$).

a. Specifeer de stochastische verliesfunctie $L(K)$ voor deze verzekering. [5 punten]
b. Geef een uitdrukking voor de netto premie P in bekende netto koopsomsymbolen en oprentings- / disconteringsfactoren. [3 punten]
c. Zij $L_g(K)$ de stochastische verliesfunctie van een gewone gemengde verzekering met duur m, prenumerando gelijkblijvende premiebetaling tot overlijden en maximaal gedurende m jaar. Geef een **zo eenvoudig mogelijke** uitdrukking voor X in onderstaande vergelijking:

$$\mathrm{Var}[L(K)] = X\ \mathrm{Var}[L_g(K)].$$

[7 punten]

Hint: Het blijkt mogelijk te zijn X alleen uit te drukken in disconteringsfactoren.

Opgave 5 (15 punten)
We vergelijken een n jaar uitgesteld ouderdomspensioen met een n + 1 jaar uitgesteld ouderdomspensioen. Beide verzekeringen zijn op tijdstip 0 gesloten op het leven van een x-jarige. Het pensioen bedraagt 1 per jaar en wordt prenumerando uitgekeerd. De netto gelijkblijvende premie, verschuldigd bij in leven zijn aan het begin van ieder jaar en maximaal gedurende n respectievelijk n + 1 jaar, duiden we aan met P^n en P^{n+1}. Met $L^n(K)$ en $L^{n+1}(K)$ duiden we aan de stochastische verliesfuncties (op tijdstip 0) voor respectievelijk de lijfrente met uitstelduur n en de lijfrente met uitstelduur n + 1.

Een algemene formule voor de variantie van het stochastische verlies $L(K)$ voor een **willekeurige** verzekering luidt:

$$\mathrm{Var}[L\,(K)] = \sum_{k=0}^{w-x} v^{2k+2} \left(u_{k+1}^{o} - {}_{k+1}V \right)^2 \; {}_{k+1}p_x \, q_{x+k} \,,$$

waarbij u_{k+1}^{o} de uitkering bij overlijden in jaar k + 1 is, en ${}_{k+1}V$ de voorziening op tijdstip k + 1.
Toon met behulp van deze formule aan dat $\mathrm{Var}[L^{n+1}(K)] < \mathrm{Var}[L^{n}(K)]$.

Opgave 6 (10 punten)
Zij Z de stochast voor de contante waarde van de uitkering voor de verzekering op de (onafhankelijke) levens van (x) en (y) die een bedrag groot 1 uitkeert (direct) bij het overlijden van (x), indien (y) dan nog in leven is.

a. Specificeer de stochast Z. [3 punten]
b. Bereken Var[Z]. Hierbij zij gegeven dat $m_{x+t} = 0{,}05$, $m_{y+t} = 0{,}04$ (beide dus constant voor alle $t \geq 0$) en $d = 0{,}03$. [7 punten]

EINDE VAN HET TENTAMEN.