

TENTAMEN BASIS ACTUARIAAT 2, 4 juli 2003, 9.30-12.30 uur

Noteer op al uw in te leveren papieren uw naam en collegekaartnummer.

Beoordeling: Bij elke opgave is aangegeven hoeveel punten er mee verdiend kunnen worden. U kunt in totaal maximaal 90 punten behalen. Uw cijfer is $1 + (\text{behaalde punten} / 10)$. Uw cijfer wordt vervolgens eventueel nog verhoogd op grond van uw resultaten behaald met de huiswerk/practicumopgaven.

Uitslag en inzage: het tentamencijfer wordt officieel binnen 18 werkdagen aan u bekend gemaakt door de onderwijsadministratie.

Wilt u uw gecorrigeerde tentamen inzien dan dient u een afspraak te maken met de docent (r.bruning@uva.nl of tel. 030 – 2572146).

Opmerking : tenzij uitdrukkelijk anders vermeld geldt voor alle opgaven dat leeftijden en duren (dus x , n en m) geheel zijn. Verder geldt $x \geq 0$, $n \geq 1$ en $m \geq 1$. Voor de interestvoet i geldt altijd $i > 0$.

Opgave 1 (8 punten)

T_x is de toekomstige levensduur van een x -jarige. De dichtheidsfunctie van T_x is $f_x(t)$ voor $t \geq 0$. Veronderstel dat die dichtheidsfunctie er als volgt uit ziet:

$$f_x(t) = q_x \quad \text{voor } k \leq t < k+1;$$

Dit geldt voor alle $k \geq 0$ met k geheel. $f_x(t)$ is dus constant tussen twee gehele tijdstippen. Geef een uitdrukking voor $Pr[m - \frac{1}{2} \leq T_x < m + \frac{1}{2}]$ in de overlevingskansen ${}_m p_x$ en ${}_{m+1} p_x$. m is hierin een willekeurig geheel getal groter of gelijk aan nul.

Wat is het symbool voor deze kans?

Opgave 2 (10 punten)

De variatiecoëfficiënt van een stochastische variabele is gelijk aan de standaarddeviatie gedeeld door de verwachting (σ/E).

Z_{i1} is in deze opgave de contante waarde, berekend op interestvoet $i1$, van de uitkering van een kapitaalverzekering bij leven op het leven van (x) met duur n en verzekerde uitkering 1.

Z_{i2} is hetzelfde, maar contant gemaakt op interestvoet $i2$ ($i1$ en $i2$ allebei groter dan nul).

Laat zien welke van onderstaande drie beweringen over de variatiecoëfficiënten van Z_{i1} en Z_{i2} de juiste is als $i1 < i2$

- i. $\frac{\sigma[Z_{i1}]}{E[Z_{i1}]} < \frac{\sigma[Z_{i2}]}{E[Z_{i2}]}$
- ii. $\frac{\sigma[Z_{i1}]}{E[Z_{i1}]} = \frac{\sigma[Z_{i2}]}{E[Z_{i2}]}$
- iii. $\frac{\sigma[Z_{i1}]}{E[Z_{i1}]} > \frac{\sigma[Z_{i2}]}{E[Z_{i2}]}$

Opgave 3 (a. 8 punten; b. 8 punten)

Los X op in de volgende vergelijkingen, waarbij u voor X dient te schrijven een enkel algemeen bekend (koopsom)symbool.

$$a. n \ddot{a}_x - \left(I_{\overline{n}|} \right)_x = X$$

NB: $\left(I_{\overline{n}|} \right)_x$ is het symbool voor de netto koopsom van een levenslange

postnumerando lijfrente waarvan de uitkering het eerste jaar gelijk is aan 1, de uitkering vervolgens jaarlijks met 1 stijgt en vanaf tijdstip n constant blijft op een niveau ter grootte van n .

$$b. \left(A_{\overline{x:n}|} + a_{\overline{x:n}|} \right) \cdot (1+i) = X$$

Opgave 4 (10 punten)

Geef de éénjarige recursierelatie tussen $(IA)_{x+k:n-k|}^1$ en $(IA)_{x+k+1:n-k-1|}^1$ waarbij k geheel en $0 \leq k < n$.

Als u deze recursierelatie zou gebruiken voor het berekenen van de koopsomtabel $(IA)_{x+k:n-k|}^1$ voor $k=0,1,\dots,n$, met welke startwaarde begint u dan die recursie?

Opgave 5 (10 punten)

Stel dat van de volgende benadering voor $\ddot{a}_x^{(p)}$ uitgegaan mag worden ($p > 1$):

$$\ddot{a}_x^{(p)} \approx (\alpha(p) + \beta(p)) \ddot{a}_x - \beta(p)$$

$$\text{met } \alpha(p) = \frac{1}{p} \sum_{h=1}^{p-1} v^{\frac{h}{p}} \left(1 - \frac{h}{p} \right) \text{ en } \beta(p) = \frac{1}{p} \sum_{h=1}^{p-1} (1+i)^{\left(1 - \frac{h}{p} \right) \frac{h}{p}}$$

Druk $a_{\overline{x:n}|}^{(p)}$ uit in $a_{\overline{x:n}|}$, ${}_n E_x$, $\alpha(p)$ en $\beta(p)$

Opgave 6 (a. 10 punten; b. 10 punten)

Gegeven is een verzekering van kapitaal bij leven met premierestitutie. Het verzekerd kapitaal bij leven is 1. De verzekering is afgesloten op het leven van een x -jarige en heeft een duur van n jaar. De rekenrente is i . De jaarlijkse netto premie duiden we aan met P en is prenumerando jaarlijks verschuldigd tot overlijden en maximaal gedurende n jaar.

Bij overlijden voor de einddatum wordt aan het eind van het overlijdensjaar uitgekeerd de met interestvoet i naar het uitkeringstijdstip opgerente betaalde netto premies P .

Maar bij overlijden na tijdstip m , met m een geheel tijdstip tussen 0 en n , is het verzekerd kapitaal bij overlijden gemaximeerd tot de naar uitkeringstijdstip opgerente waarde van de in de eerste m jaar betaalde netto premies.

a. Specificeer $L(K)$, de stochast voor het totale verlies van deze verzekering als functie van de stochast K , de verkorte toekomstige levensduur van (x) . Geef in een grafiek een schets van de verliesfunctie $L(k)$ voor $k \geq 0$, die de uitkomst van de stochast $L(K)$ geeft in het geval dat $K = k$. In deze schets moeten specifieke kenmerken van de functie $L(k)$, zoals wanneer dalen/stijgen, wanneer groter/kleiner dan nul, duidelijk naar voren komen.

b. Geef een zo eenvoudig mogelijke uitdrukking voor de netto premie P in algemeen bekende actuariële symbolen (zonder sommatietekens).

Opgave 7 (a. 8 punten; b. 8 punten)

Bij een bijzondere levenslange overlijdensverzekering, afgesloten op het leven van een x -jarige ($x < 65$), is de uitkering gelijk aan 1 als de verzekerde overlijdt voor leeftijd 65 en 2 bij overlijden op of na leeftijd 65. De uitkering vindt plaats aan het eind van het overlijdensjaar. De netto premie P is gelijkblijvend en prenumerando jaarlijks betaalbaar tot leeftijd 65 of tot eerder overlijden.

De netto voorziening op tijdstip k , voor k geheel, duiden we aan met ${}_kV$.

- a. Geef de prospectieve formule voor ${}_kV$. Onderscheid de gevallen $0 \leq k < 65-x$ en $k \geq 65-x$.
- b. Geef de retrospectieve formule voor ${}_kV$, ook nu voor de gevallen $0 \leq k < 65-x$ en $k \geq 65-x$.

EINDE VAN HET TENTAMEN!

Opgave 1

$$Pr[m-1/2 \leq T_x < m+1/2] = {}_{m-1/2}q_x = \int_{t=m-1/2}^{m+1/2} f_x(t) dt =$$

$$\int_{t=m-1/2}^m {}_{m-1}q_x dt + \int_{t=m}^{m+1/2} {}_m q_x dt = \frac{1}{2} {}_{m-1}q_x + \frac{1}{2} {}_m q_x = \frac{1}{2} ({}_{m-1}p_x - {}_m p_x) + \frac{1}{2} ({}_m p_x - {}_{m+1}p_x) = \frac{1}{2} ({}_{m-1}p_x + {}_{m+1}p_x)$$

Opgave 2

$$\frac{\sigma[Z_i]}{E[Z_i]} = \frac{\sqrt{E[Z_i^2] - (E[Z_i])^2}}{E[Z_i]} = \frac{\sqrt{v^{2n} {}_n p_x - (v^n {}_n p_x)^2}}{v^n {}_n p_x} = \frac{\sqrt{v^{2n} {}_n p_x (1 - {}_n p_x)}}{v^n {}_n p_x} = \frac{\sqrt{{}_n p_x \cdot {}_n q_x}}{{}_n p_x}$$

Dit is onafhankelijk van i , dus bewering ii is de juiste.

Opgave 3

$$a. n \ddot{a}_x - \left(I_{\overline{n}|} a \right)_x = n \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k {}_k p_x - \sum_{k=1}^{n-1} v^k {}_k p_x - n \sum_{k=n}^{\omega-x} v^k {}_k p_x = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) v^k {}_k p_x = (D\ddot{a})_{x:\overline{n}|}$$

$$b. \left(A_{\overline{x:n}|} + a_{x:\overline{n}|} \right) \cdot (1+i) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k q_x + \sum_{k=1}^n v^k {}_k p_x \right) \cdot (1+i) =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} ({}_k p_x - {}_{k+1} p_x) + \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_{k+1} p_x \right) \cdot (1+i) = (1+i) \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_k p_x = \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

Opgave 4

$$(IA)_{x+k:\overline{n-k}|} = A_{x+k:\overline{n-k}|} + v p_{x+k} (IA)_{x+k+1:\overline{n-k-1}|}. \text{ Startwaarde: } (IA)_{x+n:\overline{0}|} = 0$$

Opgave 5

$$a_x^{(p)} = \ddot{a}_x^{(p)} - \frac{1}{p} \approx (\alpha(p) + \beta(p)) \ddot{a}_x - \beta(p) - \frac{1}{p} =$$

$$= (\alpha(p) + \beta(p)) (a_x + 1) - \beta(p) - \frac{1}{p} = (\alpha(p) + \beta(p)) a_x + \left(\alpha(p) - \frac{1}{p} \right)$$

$${}_n | a_x^{(p)} = {}_n E_x a_x^{(p)} \approx (\alpha(p) + \beta(p)) {}_n | a_x + {}_n E_x \left(\alpha(p) - \frac{1}{p} \right)$$

$$a_{x:n}^{(p)} = a_x^{(p)} - {}_n | a_x^{(p)} \approx (\alpha(p) + \beta(p)) a_{x:n} + (1 - {}_n E_x) \left(\alpha(p) - \frac{1}{p} \right)$$

Opgave 6

$$a. L(K) = \begin{cases} v^{K+1} P \ddot{a}_{\overline{K+1}|} (1+i)^{K+1} - P \ddot{a}_{\overline{K+1}|} & = 0 & \text{voor } K < m \\ v^{K+1} P \ddot{a}_{\overline{m}|} (1+i)^{K+1} - P \ddot{a}_{\overline{K+1}|} & = P(\ddot{a}_{\overline{m}|} - \ddot{a}_{\overline{K+1}|}) & \text{voor } m \leq K < n \\ v^n & - P \ddot{a}_{\overline{n}|} & = v^n - P \ddot{a}_{\overline{n}|} & \text{voor } K \geq n \end{cases}$$

Voor $m \leq k < n$ is de verliesfunctie $L(k)$ kleiner dan nul en dalend, vanwege $\ddot{a}_{\overline{k+1}|} > \ddot{a}_{\overline{m}|}$ voor $k \geq m$.

Hoe groter k des te minder snel is de daling. Voor $k \geq n$ moet de verliesfunctie $L(k)$ groter dan nul zijn, want als $L(k)$ negatief is op een interval dan moet er ook een interval zijn waarop $L(k)$ positief is. $L(k)$ is bovendien constant voor $k \geq n$ dus vanaf n voortdurend positief.

$$b. \text{ Schrijf } L(K) \text{ als volgt: } L(K) = \begin{cases} P \ddot{a}_{\overline{K+1}|} - P \ddot{a}_{\overline{K+1}|} & \text{voor } K < m \\ P \ddot{a}_{\overline{m}|} - P \ddot{a}_{\overline{K+1}|} & \text{voor } m \leq K < n \\ P \ddot{a}_{\overline{m}|} - P \ddot{a}_{\overline{n}|} + v^n - P \ddot{a}_{\overline{m}|} & \text{voor } K \geq n \end{cases}$$

$$\text{Dan volgt uit } E[L]=0: P \ddot{a}_{\overline{x:m}|} - P \ddot{a}_{\overline{x:n}|} + (v^n - P \ddot{a}_{\overline{m}|})_n p_x = 0 \Rightarrow P = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\frac{1}{i}}}{\ddot{a}_{\overline{x:n}|} - \ddot{a}_{\overline{x:m}|} + \ddot{a}_{\overline{m}|} n p_x}$$

Opgave 7

$$a. P = \frac{2A_x - A_{x:\overline{65-x}|}^1}{\ddot{a}_{\overline{x:65-x}|}}$$

$${}_k V = 2A_{x+k} - A_{x+k:\overline{65-x-k}|}^1 - P \ddot{a}_{\overline{x+k:65-x-k}|} \quad \text{voor } k < 65-x$$

$${}_k V = 2A_{x+k} \quad \text{voor } k \geq 65-x$$

$$b. {}_k V = \frac{1}{E_x} \left(P \ddot{a}_{\overline{x:k}|} - A_{x:k}^1 \right) \quad \text{voor } k < 65-x$$

$${}_k V = \frac{1}{E_x} \left(P \ddot{a}_{\overline{x:65-x}|} - (2A_{x:k}^1 - A_{x:m}^1) \right) \quad \text{voor } k \geq 65-x$$