



FACULTEIT DER ECONOMISCHE WETENSCHAPPEN EN ECONOMETRIE
Afdeling Kwantitatieve Economie

Dynamische systemen

Tentamen 17 januari 2006

Dit tentamen bestaat uit vier opgaven. Wees precies. Een antwoord is **geheel fout** als er geen argumenten worden gegeven. Alle deelvragen brengen 10 punten op. **Rekenmachines zijn niet toegestaan.**

Opgave 1

a Van de differentieerbare functies x_1 , x_2 en x_3 is bekend dat $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -1$ en $x_3(0) = 2$. Verder is bekend dat voor alle t geldt dat

$$\dot{x}_1 = 2x_1, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + x_2, \quad \dot{x}_3 = 6x_2 - x_3.$$

Bereken alle nulpunten van $x_3(t)$, zo deze er zijn.

b Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$\dot{x} = -x^{4/5}, \quad x(0) = 1.$$

Geef alle functies x die aan deze vergelijking voldoen.

Opgave 2

Laat de volgende tweede-orde differentievergelijking gegeven zijn:

$$9x(t+1) + 6x(t) + 4x(t-1) = 0.$$

met $x(t) \in \mathbb{R}$ voor $t \in \mathbb{Z}$. **a** Bepaal alle oplossingen van deze differentievergelijking.

b Laat verder bekend zijn dat $x(0) = x(1) = 1$. Bereken $x(100)$. Vereenvoudig het antwoord zover mogelijk.

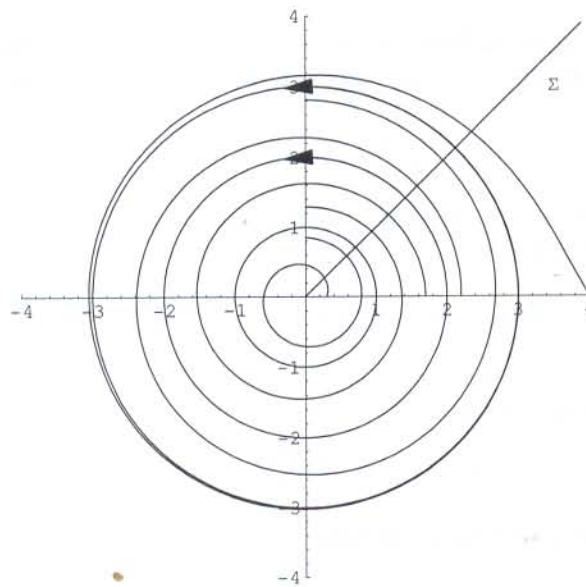
Z.O.Z.

Opgave 3

a Bepaal van alle evenwichten van het volgende stelsel de stabiliteit:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + \frac{x_1^2}{2} + 2x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 - 1.\end{aligned}$$

b Gegeven is het volgende fase­diagram. Schets de Poincaré-afbeelding van de Poincaré-sectie Σ naar zichzelf.



Opgave 4

De familie $f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ van afbeeldingen wordt gegeven door $f_\lambda(x) = 1 - \lambda x^2$

a Schets de grafiek van $f_{\frac{1}{2}}$. Schets in deze grafiek een aantal illustratieve baan van het systeem $x_{t+1} = f_{\frac{1}{2}}(x_t)$ door middel van een spinnewebplot.

b Vind alle dekpunten van f_λ en bepaal hun stabiliteit. Geef het resultaat in een bifurcatiediagram.

c Vind met een spinnewebplot een baan van $x_{t+1} = f_2(x_t)$ die dicht bij $x = 0$ begint. Schets de bijbehorende tijdreeks in een (t, x_t) -diagram.