FACULTEIT DER ECONOMISCHE WETENSCHAPPEN EN ECONOMETRIE
Afdeling Kwantitatieve Economie

Dynamische systemen

Opgave 1

a *Van de differentieerbare functies f, g en h is bekend dat $f(0) = 1$, $g(0) = 0$ en $h(0) = 0$. Verder is bekend dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $f'(x) = g(x) + h(x)$, $g'(x) = f(x) + h(x)$, en $h'(x) = f(x) + g(x)$. Bereken $g(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.*
Als we x door t vervangen, f door x_1, g door x_2 en h door x_3, hebben we het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$\dot{x} = Ax = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x,$$

met beginvoorwaarde $x(0) = (1, 0, 0)$. De vraag is dan $x_2(t)$ te berekenen voor alle $t \in \mathbb{R}$.
We berekenen de eigenwaarden en eigenvectoren van A. Karakteristiek polynoom:

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 1 + 1 + \lambda + \lambda + \lambda = -\lambda^3 + 3\lambda + 2.$$

We zien onmiddelijk dat $\lambda = -1$ een oplossing is. Uitdelen levert dat

$$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2).$$

De eigenwaarden van A zijn -1 (met algebraïsche multipliciteit 2) en 2.
Eigenvectoren: voor $\lambda = 2$ moeten we oplossen

$$(A - 2I)v = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} v = 0.$$

Dit levert de eigenvector $(1, 1, 1)$.
Voor $\lambda = -1$ moeten we

$$(A + I)v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} v = 0$$

oplossen. Dit stelsel is equivalent aan de vergelijking $v_1 + v_2 + v_3 = 0$, die bijvoorbeeld de beide lineair onafhankelijke vectoren $(1, -1, 0)$ en $(0, 1, -1)$ als oplossingen heeft; dit zijn twee lineair onafhankelijke eigenvectoren.
We hebben een basis van eigenvectoren gevonden, en kunnen daarmee de transformatiematrix C vormen, waar

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

We hebben dat $A = C\Lambda C^{-1}$, met $\Lambda = \operatorname{diag}(2, -1, -1)$. Als $y(t) = C^{-1}x(t)$, dan is het getransformeerde stelsel

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = C^{-1}x(0) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dit stelsel heeft als oplossing

$$y(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} \\ 2\,\mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}.$$

Het oorspronkelijke stelsel heeft dan als oplossing

$$x(t) = Cy(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + 2\,\mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}.$$

Dit kunnen we nog controleren door substitutie.
Als we teruggaan op de oorspronkelijke variabelen, zien we dat

$$g(x) = \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-x}.$$

b *Gegeven is het stelsel van differentiaalvergelijkingen*

$$\dot{x}_1 = \mathrm{e}^{x_1^2 + x_2^2}, \quad \dot{x}_2 = \sin(x_1 x_2), \qquad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0.$$

Heeft dit stelsel een oplossing? Zo ja, is de oplossing eenduidig? (Argumenten, argumenten ...)
Dit stelsel is van de vorm

$$\dot{x} = F(x),$$

met $F(x) = (\mathrm{e}^{x_1^2+x_2^2}, \sin(x_1 x_2))$. De functie F is continu differentieerbaar, en voldoet daarom aan een Lipschitzvoorwaarde. De stelling over existentie en eenduidigheid van oplossingen garandeert nu dat de differentiaalvergelijking een unieke oplossing bezit.

c *Gegeven is de differentiaalvergelijking*

$$\dot{x} = \frac{1}{\cos x}, \qquad x(0) = \frac{\pi}{6}.$$

Bereken de oplossing en vereenvoudig het antwoord zover mogelijk.
Met separatie van variabelen:

$$\begin{aligned}
\cos x\,\dot{x} &= 1, \\
\int_0^t \cos x\,\dot{x}\,\mathrm{d}t &= t, \\
\int_{x(0)}^{x(t)} \cos x\,\mathrm{d}x &= t, \\
\sin x(t) - \sin x(0) &= t, \\
x(t) &= \arcsin(t + \sin x(0)) = \arcsin\left(t + \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Opgave 2
Laat het volgende stelsel van differentievergelijkingen gegeven zijn:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_2(t) \\ x_2(t+1) &= -x_1(t) - \sqrt{3}\, x_2(t). \end{aligned}$$

met $x(t) \in \mathbb{R}^2$ *voor* $t \in \mathbb{Z}$.

a *Bepaal alle oplossingen van deze differentievergelijking.*
We schrijven het stelsel in matrixvorm:

$$x(t+1) = Ax(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} x(t).$$

Karakteristiek polynoom:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \sqrt{3}\lambda + 1 = \left(\lambda + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \left(\lambda + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right)\left(\lambda + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\right)$$

Eigenwaarden $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \pm \frac{1}{2}\mathrm{i}$. We zetten $\lambda = \lambda_1$; dan is $\bar{\lambda} = \lambda_2$. Om de eigenwaarden in de vorm $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$ te schrijven, berekenen we

$$r = |\lambda| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1,$$

en

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} = \cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta = \frac{\lambda}{r} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

Deze vergelijking wordt opgelost door $\vartheta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. We hebben gevonden dat

$$\lambda_1 = \lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}, \qquad \lambda_2 = \bar{\lambda} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}.$$

Eigenvectoren: voor de eigenwaarde λ hebben we dat een complexe eigenvector w voldoet aan (eerste regel van $(A - \lambda I)w = 0$):

$$-\lambda w_1 + w_2 = 0;$$

we kiezen $w = (1, \lambda) = (1, -\frac{1}{2}\sqrt{3}) + \mathrm{i}(0, \frac{1}{2})$.
Als transformatiematrix nemen we

$$C = (\operatorname{Re} w \ \ -\operatorname{Im} w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}.$$

We zien dat

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{5\pi}{6} & -\sin\frac{5\pi}{6} \\ \sin\frac{5\pi}{6} & \cos\frac{5\pi}{6} \end{pmatrix}.$$

en

$$A^t = C \begin{pmatrix} \cos\frac{5\pi}{6}t & -\sin\frac{5\pi}{6}t \\ \sin\frac{5\pi}{6}t & \cos\frac{5\pi}{6}t \end{pmatrix} C^{-1}.$$

We berekenen voor $x(0) = (\xi_1, \xi_2)$:

$$\begin{aligned}
x(t) &= A^t x(0) \\
&= C \begin{pmatrix} \cos \frac{5\pi}{6} t & -\sin \frac{5\pi}{6} t \\ \sin \frac{5\pi}{6} t & \cos \frac{5\pi}{6} t \end{pmatrix} C^{-1} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \\
&= C \begin{pmatrix} \cos \frac{5\pi}{6} t & -\sin \frac{5\pi}{6} t \\ \sin \frac{5\pi}{6} t & \cos \frac{5\pi}{6} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_1\sqrt{3} + 2\xi_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \cos \frac{5\pi}{6} t - \left(\xi_1\sqrt{3} + 2\xi_2\right) \sin \frac{5\pi}{6} t \\ \xi_1 \sin \frac{5\pi}{6} t - \left(\xi_1\sqrt{3} + 2\xi_2\right) \cos \frac{5\pi}{6} t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \xi_1 \cos \frac{5\pi}{6} t - \left(\xi_1\sqrt{3} + 2\xi_2\right) \sin \frac{5\pi}{6} t \\ \xi_2 \cos \frac{5\pi}{6} t - \left(\xi_1 + \xi_2\sqrt{3}\right) \sin \frac{5\pi}{6} t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

b *Laat verder bekend zijn dat $x_1(0) = x_2(0) = 1$. Bereken $x_1(20)$. Vereenvoudig het antwoord zover mogelijk.*

We hebben dat

$$20 \times \frac{5\pi}{6} = \frac{100\pi}{6} = \frac{96\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 16\pi, \quad \cos \frac{100\pi}{6} = -\frac{1}{2}, \quad \sin \frac{100\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Invullen levert

$$x(t) = \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{3} \\ -2 - \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

We vinden dat $x_1(20) = -1 - \sqrt{3}$.

Opgave 3

Bepaal van alle evenwichten van het volgende stelsel de stabiliteit:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= 3(x_2 - x_1), \\
\dot{x}_2 &= 5x_1 - x_2 - x_1x_3, \\
\dot{x}_3 &= x_1x_2 - 4x_3.
\end{aligned}$$

We schrijven het stelsel in vectorvorm: $\dot{x} = f(x)$, met $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gelijk aan $f(x) = (3(x_2 - x_1), 5x_1 - x_2 - x_1x_3, x_1x_2 - 4x_3)$. Elk evenwicht $x = (x_1, x_2, x_3)$ voldoet aan $f(x) = 0$, oftewel aan de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned}
0 &= 3(x_2 - x_1), \\
0 &= 5x_1 - x_2 - x_1x_3, \\
0 &= x_1x_2 - 4x_3.
\end{aligned}$$

De eerste vergelijking impliceert dat $x_2 = x_1$; dit gebruiken we om x_2 uit de overige vergelijkingen te elimineren:

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_1, \\
0 &= x_1(4 - x_3), \\
0 &= x_1^2 - 4x_3.
\end{aligned}$$

Aan de tweede vergelijking wordt voldaan als ofwel $x_1 = 0$, of $x_3 = 4$. In het eerste geval vinden we het evenwicht $x = (0, 0, 0)$, in het tweede geval vinden we, met behulp van de derde vergelijking, de beide evenwichten $x = (4, 4, 4)$ en $(-4, -4, 4)$.
Om de stabiliteit in een evenwicht a te bepalen, berekenen we de afgeleide van f:

$$Df(a) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 5 - a_3 & -1 & -a_1 \\ a_2 & a_1 & -4 \end{pmatrix}.$$

De eigenwaarden van $Df(a)$ zijn nulpunten van de karakteristieke veelterm

$$\begin{aligned} \det(Df(a) - \lambda I) &= (-3-\lambda)(-1-\lambda)(-4-\lambda) - 3a_1a_2 - (3+\lambda)a_1^2 + 3(4+\lambda)(5-a_3) \\ &= -\lambda^3 - 8\lambda^2 - (a_1^2 + 3a_3 + 4)\lambda - 3a_1^2 - 3a_1a_2 - 12a_3 + 48. \end{aligned}$$

Voor $a = (0, 0, 0)$ zijn dit de oplossingen van

$$-\lambda^3 - 8\lambda^2 - 4\lambda + 48 = 0.$$

We zien aan de constante term, die gelijk is aan $\det Df(a)$, dat tenminste één eigenwaarde positief moet zijn. Maar dan is $a = (0, 0, 0)$ niet stabiel.
De karakteristieke veeltermen voor $a = (4, 4, 4)$ en $a = (-4, -4, 4)$ zijn beide gelijk aan

$$-\lambda^3 - 8\lambda^2 - 32\lambda - 96 = 0$$

Als de nulpunten van deze veelterm gelijk zijn aan λ_1, λ_2 en λ_3, dan hebben we dat

$$\begin{aligned} -\lambda^3 - 8\lambda^2 - 32\lambda - 96 &= (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda) \\ &= -\lambda^3 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2 - (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)\lambda + \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned}$$

Hieruit halen we de drie vergelijkingen

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= -8, \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 &= 32, \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 &= -96. \end{aligned}$$

De derde vergelijking impliceert dat er twee mogelijkheden zijn: of alle eigenwaarden hebben negatief reëel deel, of twee eigenwaarden hebben positief en één heeft negatief reëel deel.
Stel dat λ_1 en λ_2 een niet-negatief reëel deel hebben. Ze zijn dan ofwel elkaars complex geconjugeerde, of beide reëel. In ieder geval is dan $\lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$ en $\lambda_1\lambda_2 \geq 0$. Sterker nog, uit de tweede vergelijking volgt zelfs

$$\begin{aligned} &\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = 32, \\ &\lambda_1\lambda_2 - 32 = -\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2) \geq 0, \\ &\lambda_1\lambda_2 \geq 32, \end{aligned}$$

omdat $\lambda_3 < 0$. We zien vervolgens dat

$$\lambda_3 = -\frac{96}{\lambda_1\lambda_2} \geq -3,$$

en, uit de eerste vergelijking,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -8 - \lambda_3 \leq -5.$$

Dit is echter in tegenspraak met $\lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$. We concluderen dat het niet mogelijk is dat λ_1 en λ_2 een niet-negatief reëel deel hebben, en dat de evenwichten $x = (-4, -4, 4)$ en $x = (4, 4, 4)$ asymptotisch stabiel zijn.

Opgave 4
De familie $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ van afbeeldingen wordt gegeven door $f_\lambda(x) = \lambda x - \lambda x^3$.

a *Vind alle dekpunten van f_λ en bepaal hun stabiliteit. Geef het resultaat in een bifurcatiediagram.*
Dekpunten van f_λ voldoen aan de vergelijking

$$\begin{aligned}
&\lambda x - \lambda x^3 = x,\\
&\lambda x \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda} - x^2 \right) = 0,\\
&\lambda x \left(\sqrt{\frac{\lambda - 1}{\lambda}} - x \right) \left(\sqrt{\frac{\lambda - 1}{\lambda}} + x \right) = 0.
\end{aligned}$$

We zien dat het punt $x_0 = 0$ dekpunt is voor alle λ, terwijl we voor $\lambda \geq 1$ ook nog de dekpunten

$$x_1 = \sqrt{\frac{\lambda - 1}{\lambda}}, \qquad x_2 = -\sqrt{\frac{\lambda - 1}{\lambda}}$$

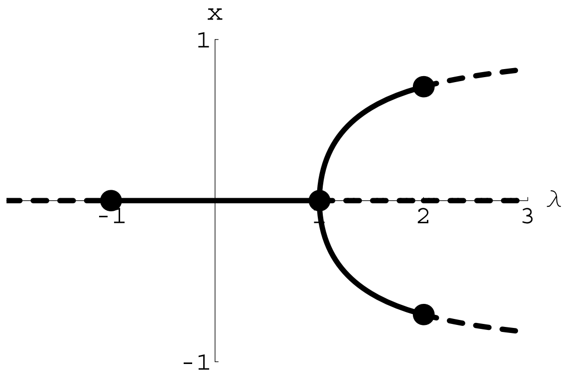
hebben. Merk op dat $\lim_{\lambda \to \infty} x_1 = 1$ en $\lim_{\lambda \to \infty} x_2 = -1$.
Voor de stabiliteit berekenen we de afgeleide f'_λ:

$$f'_\lambda(x) = \lambda - 3\lambda x^2;$$

dit levert

$$\begin{aligned}
f'_\lambda(0) &= \lambda,\\
f'_\lambda\left(\pm\sqrt{\frac{\lambda - 1}{\lambda}} \right) &= \lambda - 3(\lambda - 1) = -2\lambda + 3.
\end{aligned}$$

We zien dat x_1 asymptotisch stabiel is voor $|\lambda| < 1$ en instabiel voor $|\lambda| > 1$. Verder zijn x_2 en x_3 asymptotisch stabiel voor $1 \leq \lambda \leq 2$.



b *Vind met een spinnewebplot een baan van $x_{t+1} = f_2(x_t)$ die dicht bij $x = 0$ begint. Schets de bijbehorende tijdreeks in een (t, x_t)-diagram. Maak* **duidelijke** *tekeningen.*