Kwantitatieve Economie / Faculteit Economie en Bedrijfskunde / Universiteit van Amsterdam

Tentamen Dynamische Systemen

Datum: Dinsdag, 13 januari 2009 Tijd: 9:00-12:00

- Schrijf je naam en studentnummer op alles dat je inlevert.
- Dit is *geen* open boek tentamen.
- Licht antwoorden toe! Geen toelichting = geen punten.
- Dit tentamen bestaat uit vier vragen.

Vraag 1 (25 punten):
Beschouw het dynamisch systeem gegeven door:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -10 & -4 \end{pmatrix} x \quad \text{en} \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Geef de oplossing.

Vraag 2 (25 punten):
Beschouw het dynamisch systeem gegeven door:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= -x_t^2 y_t + \epsilon x_t y_t + \epsilon x_t - x_t^2 \\ y_{t+1} &= y_t^2 - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

waar $\epsilon \in [0,1]$ een parameter is.

a) Vind de dekpunten van het systeem als functie van ϵ.

b) Bepaal (indien mogelijk) de stabiliteit van de dekpunten. Geef duidelijk aan hoe de stabiliteit afhangt van ϵ.

Vraag 3 (15 punten):
Zijn de onderstaande beweringen waar of onwaar? Motiveer je antwoord.

a) Stel $H(x,y)$ is een continu-differentieerbare functie, die strikt concaaf is. Dan zijn de dekpunten van het dynamisch systeem gegeven door $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}$ en $\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ zadelpunten.

b) Voor elke $x_0 \in (-1,1)$ heeft de differentiaalvergelijking $\dot{x} = |x|(1-x^2)$ een unieke oplossing.

c) Een oplossing van de differentiaalvergelijking $t\dot{x}(t) = x(t) + t$ is gegeven door $x(t) = t \ln t$.

Vraag 4 (25 punten):
Stel er is een bevolking met oneindig veel leden. Elk lid is of een *havik* of een *duif*. De fractie havikken op tijdstip t is p_t en de fractie duiven op tijdstip t is q_t: $p_t, q_t \geq 0$ en $p_t + q_t = 1$. Op tijdstip t wordt elk lid van de bevolking willekeurig gekoppeld aan een ander lid. Deze twee leden spelen nu een spel met daarin twee strategieën: havik en duif. Elke havik speelt de strategie havik en elke duif speelt de strategie duif. Als twee havikken elkaar treffen dan is hun beider opbrengst 1. Als twee duiven elkaar treffen, dan is de opbrengst 4. Maar als een havik een duif treft, dan krijgt de havik 6 en de duif 2. (Denk aan twee vogels die vechten om een voedselbron. De havik is aggresief en wint het altijd van de makke duif, maar als hij een andere havik treft dan volgt er een kostbaar gevecht.) De verwachte opbrengst van de havik in dit spel noteren we met EH_t, de verwachte opbrengst van de duif met ED_t , en de verwachte opbrengst van alle leden met ET_t.

a) Laat zien dat $EH_t = p_t + 6q_t$, $ED_t = 2p_t + 4q_t$ en $ET_t = p_t^2 + 8p_tq_t + 4q_t^2$

De fractie havikken en duiven op tijdstip $t + 1$ hangt af van het succes van de leden die havik en duif hebben gespeeld op tijdstip t. (Binnen de wiskundige evolutietheorie zijn de leden in de volgende periode kinderen van de huidige leden, die hetzelfde gedrag vertonen als hun ouders. En meer succesvolle leden hebben meer kinderen dan onsuccesvolle leden. Zie Maynard Smith (1982).) Als $EH_t > ET_t$ (havikken succesvoller dan gemiddeld), dan stijgt de fractie havikken. En vice versa als $ED_t > ET_t$. De exacte dynamica wordt gegeven door:

$$p_{t+1} = \frac{EH_t}{ET_t} p_t$$
$$q_{t+1} = \frac{ED_t}{ET_t} q_t$$

b) Laat zien dat $p_{t+1} + q_{t+1} = 1$. Gebruik dit om de dynamica te reduceren tot één vergelijking voor p_{t+1} die alleen afhangt van p_t.

c) Vind de dekpunten van dit systeem en bepaal hun stabiliteit.

d) Stel het systeem bevindt zich in een stabiel dekpunt. Kan een rationele speler (d.w.z. iemand die kan kiezen tussen het spelen van havik en duif en die zijn opbrengst maximaliseert, maar nog steeds willekeurig wordt gekoppeld aan een havik of duif) in verwachte waarde een hogere opbrengst halen dan ET_t? (Bonus: Wat vertelt dat ons over het Nash-evenwicht van dit spel?)

Bibliografie

Maynard Smith, J. (1982): *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press, Cambridge