

Oplossing tentamen dynamische systemen 13 januari 2009

Vraag 1:

De eigenwaarden en -vectoren van de matrix zijn

$$\lambda = 2i \text{ en } v = (2 + i, -5)$$

en hun geconjugeerden. Als transformatie gebruiken we

$$C = [\operatorname{Re} v - \operatorname{Im} v] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Daaruit volgt:

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

met bb. standaardoplossing

$$\begin{bmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix}$$

Daaruit volgt:

$$x(t) = C \begin{bmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix} C^{-1}x(0) = \begin{pmatrix} 2 \cos 2t - \sin 2t \\ -5 \cos 2t \end{pmatrix}$$

Vraag 2:

a) Dekpunten zijn oplossingen van:

$$\begin{aligned} x &= -x^2y + \epsilon xy + \epsilon x - x^2 \\ y &= y^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Uit de tweede vergelijking volgt $y = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})$ of $y = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$. Uit de eerste vergelijking:

$$0 = x(\epsilon(1 + y) - 1 - (1 + y)x)$$

Oftewel $x = 0$ of $x = \epsilon - \frac{1}{1+y}$. Dus de dekpunten zijn:

I: $(0, \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}))$

II: $(0, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}))$

III: $(\epsilon - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}, \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}))$

IV: $(\epsilon - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}))$

b) De Jacobiaan is een bovendiagonaalmatrix. De eigenwaarden zijn dus gelijk aan de diagonaal elementen. De afgeleide van y_{t+1} naar y_t is $2y_t$. Dus één van de eigenwaarden in geval **I** en **III** is $1 - \sqrt{3}$, en die is in absolute waarde kleiner dan één. En één van de eigenwaarden in geval **II** en **IV** is $1 + \sqrt{3} > 1$. De andere eigenwaarde is de afgeleide van x_{t+1} naar x_t en die is gelijk aan $\epsilon - 2x_t + \epsilon y_t - 2x_t y_t$. Deze zijn gelijk aan

$$\text{I: } 0 \leq \epsilon \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \right) < 1 \text{ voor } \epsilon \in [0, 1]$$

$$\text{II: } \epsilon \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \right) < 1 \text{ voor } \epsilon < \frac{2}{3+\sqrt{3}}$$

$$\text{III: } 2 + \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right) \epsilon > 1 \text{ voor } \epsilon \in [0, 1]$$

$$\text{IV: } 2 - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right) \epsilon < 1 \text{ voor } \epsilon > \frac{2}{3+\sqrt{3}}$$

Dus dekpunt **I** is altijd stabiel. Dekpunt **III** is altijd een zadel. Dekpunt **II** is een zadel als $\epsilon < \frac{2}{3+\sqrt{3}}$ en anders onstabiel. Dekpunt **IV** is onstabiel als $\epsilon < \frac{2}{3+\sqrt{3}}$ en anders een zadel.

Vraag 3:

- a) Onwaar. De Jacobiaan is gegeven door

$$\begin{bmatrix} H_{xy} & H_{yy} \\ -H_{xx} & -H_{xy} \end{bmatrix}.$$

Merk op dat het spoor nul is en de determinant is $-(H_{xy})^2 + H_{xx}H_{yy} > 0$ (want de functie is concaaf). De eigenwaarden van het systeem zijn nu zodanig dat $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ en $\lambda_1\lambda_2 > 0$. Als het dekpunt een zadel zou zijn, dan geldt $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Dus $\lambda_1\lambda_2 < 0$. En dat is in tegenspraak met de vorige beweringen.

- b) Waar, want de functie voldoet aan de Lipschitzvoorwaarde op dit interval.
 c) Waar. Differentiëren van $x(t)$ naar t geeft $\dot{x}(t) = \ln t + 1$. Invullen in de differentiaalvergelijking geeft: $t(\ln t + 1) = t \ln t + t$. En dat klopt.

Vraag 4:

- a) $EH_t = 1 \times p_t + 6 \times q_t$: de kans om een havik te ontmoeten maal de opbrengst plus de kans om een duif te ontmoeten maal de opbrengst. Idem $ED_t = 2 \times p_t + 4 \times q_t$ alleen de opbrengsten zijn anders. Vervolgens geldt $ET_t = EH_t p_t + ED_t q_t$. Uitschrijven geeft het gewenste resultaat.

- b) Immers:

$$p_{t+1} + q_{t+1} = \frac{EH_t}{ET_t} p_t + \frac{ED_t}{ET_t} q_t = \frac{EH_t}{EH_t p_t + ED_t q_t} p_t + \frac{ED_t}{EH_t p_t + ED_t q_t} q_t = 1.$$

Vervolgens elimineren we q_t .

$$p_{t+1} = \frac{EH_t}{ET_t} p_t = \frac{p_t + 6q_t}{p_t^2 + 8p_t q_t + 4q_t^2} p_t = \frac{p_t + 6(1-p_t)}{p_t^2 + 8p_t(1-p_t) + 4(1-p_t)^2} p_t$$

c) Voor dekpunten geldt:

$$p = \frac{p + 6(1 - p)}{p^2 + 8p(1 - p) + 4(1 - p)^2}p.$$

We zien gelijk dat $p = 0$ (alleen duiven) en $p = 1$ (alleen havikken) dekpunten zijn. Na enige algebra volgt $p = \frac{2}{3}$ (een mengeling van duiven en havikken) als derde dekpunt. Voor de stabiliteit berekenen we de afgeleide van

$$f(p) = \frac{p + 6(1 - p)}{p^2 + 8p(1 - p) + 4(1 - p)^2}p.$$

Deze is

$$f'(p) = \frac{24 - 40p + 9p^2}{(4 - 3p)^2}.$$

Daaruit volgt $f'(0) = 3/2 > 1$ en $f'(2/3) = 3/4 < 1$ en $f'(1) = 2 > 1$. Oftewel evenwichten met alleen havikken of alleen duiven zijn onstabiel, maar de mengeling is stabiel.

d) Dus $p = \frac{2}{3}$. De rationele speler kiest of havik of duif. Zijn verwachte opbrengst, als hij havik speelt, is $EH = p + 6q = \frac{2}{3} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{8}{3}$. Zijn verwachte opbrengst, als hij duif speelt, is $ED = 2p + 4q = 2 \times \frac{2}{3} + 4 \times \frac{1}{6} = \frac{8}{3}$. Oftewel $ET = EH = ED = \frac{8}{3}$. De rationele speler kan het niet beter doen dan de voorgeprogrammeerde spelers. En dit komt omdat de voorgeprogrammeerde spelers een Nash-evenwicht spelen. Dit evolutionaire spel convergeert naar een rationele uitkomst zonder rationele spelers.