FACULTEIT DER ECONOMISCHE WETENSCHAPPEN EN ECONOMETRIE

Afdeling Kwantitatieve Economie

Dynamische systemen
Tentamen 23 december 2005

Dit tentamen bestaat uit vier opgaven. Wees precies. Een antwoord is **geheel fout** als er geen argumenten worden gegeven. Alle deelvragen brengen 10 punten op. **Rekenmachines zijn niet toegestaan.**

Opgave 1

a Van de differentieerbare functie y is bekend dat $y(0) = 1$ en dat voor alle t geldt dat

$$\dot{y}(t) + y(t) = \sin t.$$

Bereken $y(t)$.
b Van de differentieerbare reëelwaardige functie x is bekend dat voor alle $t \in [0, 1]$ geldt dat

$$\ddot{x}(t) + (2\pi\lambda)^2 x(t) = 0;$$

hier is $\lambda > 0$ een reële constante. Geef alle functies x die aan deze vergelijking voldoen.
c Nu is van de functie $x(t)$ uit opgave **1b** verder nog bekend dat $x(0) = x(1) = 0$. Geef alle functies x die aan deze scherpere voorwaarden voldoen. Merk op dat je antwoord van λ afhangt.

Opgave 2
Laat het volgende stelsel van differentievergelijkingen gegeven zijn:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_2(t), \\ x_2(t+1) &= -x_1(t) - 2x_2(t), \\ x_3(t+1) &= -x_1(t) - 11x_2(t) + x_3(t). \end{aligned}$$

met $x_j(t) \in \mathbb{R}$ voor $t \in \mathbb{Z}$.
a Geef de algemene oplossing van dit stelsel.
b Voor de beginvoorwaarde $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 0$, bereken $x_3(t)$ voor alle $t > 0$.

Z.O.Z.

Opgave 3

a Bepaal van alle evenwichten van het volgende stelsel de stabiliteit:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_1^2 + x_2,$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 - 1.$$

b Gegeven is het volgende fasediagram. Schets de Poincaré-afbeelding van de Poincaré-sectie Σ naar zichzelf.

Opgave 4

De familie $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ van afbeeldingen wordt gegeven door $f_\lambda(x) = x^3 - \lambda x$

a Schets de grafiek van $f_{\frac{1}{2}}$. Schets in deze grafiek een aantal illustratieve baan van het systeem $x_{t+1} = f_{\frac{1}{2}}(x_t)$ door middel van een spinnewebplot.

b Vind alle dekpunten van f_λ en bepaal hun stabiliteit. Geef het resultaat in een bifurcatiediagram.

c Vind met een spinnewebplot een baan van $x_{t+1} = f_2(x_t)$ die dicht bij $x = 0$ begint. Schets de bijbehorende tijdreeks in een (t, x_t)-diagram.