FACULTEIT DER ECONOMISCHE WETENSCHAPPEN EN ECONOMETRIE
Afdeling Kwantitatieve Economie

Dynamische systemen
Uitwerking tentamen 23 december 2005

Opgave 1
a *Van de differentieerbare functie y is bekend dat $y(0) = 1$ en dat voor alle t geldt dat*

$$\dot{y}(t) + y(t) = \sin t.$$

Bereken $y(t)$.

De vergelijking $\dot{y} = -y$ heeft als oplossing $y = c\,\mathrm{e}^{-t}$. We proberen (variatie van constanten) een oplossing van de vorm $y(t) = z(t)\,\mathrm{e}^{-t}$ van onze vergelijking te vinden. Substitutie levert dat

$$\begin{aligned} \dot{z}\,\mathrm{e}^{-t} - z\,\mathrm{e}^{-t} + z\,\mathrm{e}^{-t} &= \sin t, \\ \dot{z} &= \mathrm{e}^{t}\sin t, \\ z(t) &= z(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{s}\sin s\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Merk op dat $z(0) = y(0) = 1$. We integreren twee maal partieel:

$$\begin{aligned} \int e^{s}\sin s\,\mathrm{d}s &= \mathrm{e}^{s}\sin s - \int \mathrm{e}^{s}\cos s\,\mathrm{d}s \\ &= \mathrm{e}^{s}\sin s - \left(\mathrm{e}^{s}\cos s + \int \mathrm{e}^{s}\sin s\,\mathrm{d}s\right). \end{aligned}$$

Als we deze vergelijking oplossen naar $\int \mathrm{e}^{s}\sin s\,\mathrm{d}s$ krijgen we

$$\int e^{s}\sin s\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{s}(\sin s - \cos s) + C.$$

We zien dat

$$z(t) = z(0) + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{t}(\sin t - \cos t) + \frac{1}{2}$$

en dat

$$y(t) = \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}(\sin t - \cos t).$$

b *Van de differentieerbare reëelwaardige functie x is bekend dat voor alle $t \in [0,1]$ geldt dat*

$$\ddot{x}(t) + (2\pi\lambda)^2 x(t) = 0;$$

hier is $\lambda > 0$ een reële constante. Geef alle functies x die aan deze vergelijking voldoen.

Dit kan op meerdere manieren opgelost worden. Hier schrijven we de vergelijking als een stelsel

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(2\pi\lambda)^2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

De eigenwaarden zijn de nulpunten van

$$p(\mu) = \mu^2 + (2\pi\lambda)^2 = (\mu + 2\pi\lambda \mathrm{i})(\mu - 2\pi\lambda \mathrm{i});$$

$\mu_1 = -2\pi\lambda\mathrm{i}$ en $\mu_2 = 2\pi\lambda\mathrm{i}$. De bijbehorende (complexe) eigenvectoren zijn

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\pi\lambda\mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\pi\lambda\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking is

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \,\mathrm{e}^{-2\pi\lambda \mathrm{i}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2\pi\lambda\mathrm{i} \end{pmatrix} + c_2 \,\mathrm{e}^{2\pi\lambda \mathrm{i}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2\pi\lambda\mathrm{i} \end{pmatrix},$$

en dit levert dat

$$x(t) = c_1 \,\mathrm{e}^{-2\pi\lambda \mathrm{i}t} + c_2 \,\mathrm{e}^{-2\pi\lambda \mathrm{i}t}.$$

Deze functie is dan en slechts dan reëelwaardig als $\overline{c_2} = c_1 = \frac{1}{2}(a + b\mathrm{i})$; we vinden in dit geval dat

$$x(t) = a\cos 2\pi\lambda t - b \sin 2\pi\lambda t.$$

c *Nu is van de functie $x(t)$ uit opgave* **1b** *verder nog bekend dat $x(0) = x(1) = 0$. Geef alle functies x die aan deze scherpere voorwaarden voldoen. Merk op dat je antwoord van λ afhangt.*

Uit $x(0) = 0$ volgt $a = 0$. Uit $x(1) = 0$ volgt $\sin 2\pi\lambda = 0$ of $b = 0$. We vinden dat

$$x(t) = \begin{cases} b \sin 2\pi\lambda t & \text{als } \lambda = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots, \\ 0 & \text{in alle andere gevallen.} \end{cases}$$

Opgave 2
Laat het volgende stelsel van differentievergelijkingen gegeven zijn:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_2(t), \\ x_2(t+1) &= -x_1(t) - 2x_2(t), \\ x_3(t+1) &= -x_1(t) - 11x_2(t) + x_3(t). \end{aligned}$$

met $x_j(t) \in \mathbb{R}$ *voor* $t \in \mathbb{Z}$.
a *Geef de algemene oplossing van dit stelsel.*

We schrijven het stelsel in vectorvorm als

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & -11 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Eigenwaarden van A zijn de nulpunten van

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(\lambda(\lambda+2)+1) = (1-\lambda)(\lambda+1)^2.$$

Voor de eigenwaarde $\lambda_1 = 1$ vinden we een eigenvector door $(A - I)x = 0$ op te lossen. Dit levert

$$\begin{aligned} &-x_1 + x_2 = 0, \quad -x_1 + 3x_2 = 0, \quad -x_1 - 11x_2 = 0, \\ &\Rightarrow \\ &x_1 = x_2 = 0. \end{aligned}$$

We kiezen $\mathbf{v}_1 = (0, 0, 1)$.
Voor de eigenwaarde $\lambda_2 = -1$ kijken we naar $(A + I)x = 0$. Dit is equivalent aan

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 = 0, \quad -x_1 - x_2 = 0, \quad -x_1 - 11x_2 + 2x_3 = 0, \\ &\Rightarrow \\ &x_2 = -x_1, \quad x_3 = -5x_1. \end{aligned}$$

We vinden slechts één lineair onafhankelijke eigenvector, bijvoorbeeld $(1, -1, -5)$. De algebraïsche multipliciteit van λ_2 is groter dan de geometrische.
We zoeken derhalve vectoren die aan $(A + I)^2 x = 0$ voldoen. Eerst berekenen we

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -11 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -11 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & -12 & 4 \end{pmatrix}$$

We zien onmiddelijk dat (bijvoorbeeld) de vector $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 3)$ voldoet aan $(A+I)\mathbf{v}_2 \neq 0$, $(A+I)^2\mathbf{v}_2 = 0$.
Verder zetten we

$$\mathbf{v}_3 = (A+I)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -11 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

We introduceren de basistransformatie

$$C = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Als we $\mathbf{y}(t) = C^{-1}\mathbf{x}(t)$ zetten, dan zien we dat $\mathbf{y}(t)$ voldoet aan de vergelijking

$$\mathbf{y}(t+1) = C^{-1}AC\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t).$$

We zien dat $y_1(t) = y_1(0)$, $y_2(t) = (-1)^t y_2(0)$ en

$$y_3(t+1) = -y_3(t) + (-1)^t y_2(0).$$

We zetten (variatie van constanten) $y_3(t) = (-1)^t z(t)$ en vinden dat

$$(-1)^{t+1} z(t+1) = (-1)^{t+1} z(t) + (-1)^t y_2(0),$$

ofwel

$$z(t+1) = z(t) - y_2(0).$$

We vinden dat $z(t) = y_3(0) - ty_2(0)$ en

$$y_3(t) = (-1)^t \left(y_3(0) - t\, y_2(0) \right).$$

De algemene oplossing is nu van de vorm

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(-1)^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1)^t(c_3 - c_2 t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix},$$

met $c_j = y_j(0) \in \mathbb{R}$ constanten.

b *Voor de beginvoorwaarde* $x_1(0) = 0$*,* $x_2(0) = 1$*,* $x_3(0) = 0$*, bereken* $x_3(t)$ *voor alle* $t > 0$*.*

We berekenen

$$\mathbf{y}(0) = C^{-1}\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Invullen in de algemene oplossing levert dat

$$x(t) = -3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1)^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1)^t(-t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = (-1)^t \begin{pmatrix} -t \\ 1+t \\ -3(-1)^t + 3 + 5t \end{pmatrix}.$$

We vinden

$$x_3(t) = -3 + (-1)^t(3 + 5t).$$

Opgave 3

a *Bepaal van alle evenwichten van het volgende stelsel de stabiliteit:*

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_1^2 + x_2,$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 - 1.$$

We schrijven dit stelsel van vergelijkingen als $\dot{x} = F(x)$. De evenwichten zijn alle punten (x_1, x_2) die voldoen aan $F(x) = 0$, dat wil zeggen, aan

$$0 = -x_1 + x_1^2 + x_2,$$
$$0 = x_1 + 2x_2 - 1.$$

We elimineren x_1 uit de eerste vergelijking met behulp van de tweede, en krijgen

$$0 = -(1 - 2x_2) + (1 - 2x_2)^2 + x_2,$$
$$x_1 = 1 - 2x_2.$$

De eerste vergelijking kunnen we herschrijven als

$$0 = 4x_2^2 - x_2 = (4x_2 - 1)x_2.$$

Dit levert de evenwichten $(1, 0)$ en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.
Om de stabiliteit te bepalen, berekenen we eerst $DF(x)$:

$$DF(x) = \begin{pmatrix} -1 + 2x_1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

We zien dat

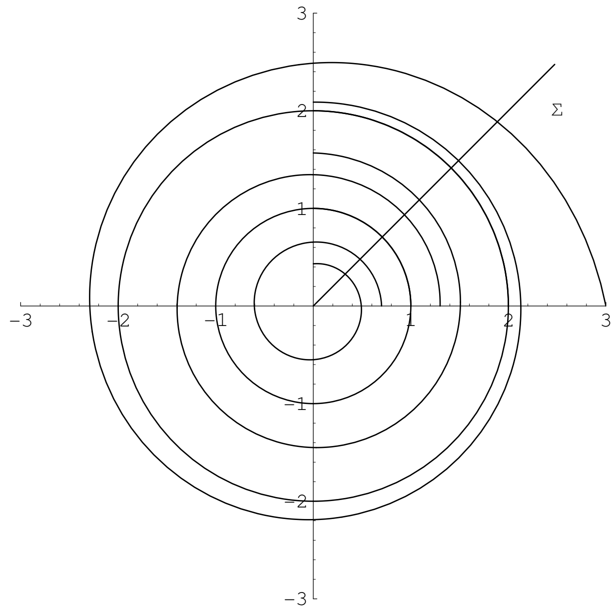
$$\det(DF(1, 0) - \lambda I) = (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2).$$

We zien hieraan dat $\lambda_1 + \lambda_2 = 3$ en $\lambda_1\lambda_2 = 1$. Daaruit volgt dat beide eigenwaarden een reëel deel groter dan 0 hebben, en het evenwicht $(1, 0)$ is instabiel.
Verder is

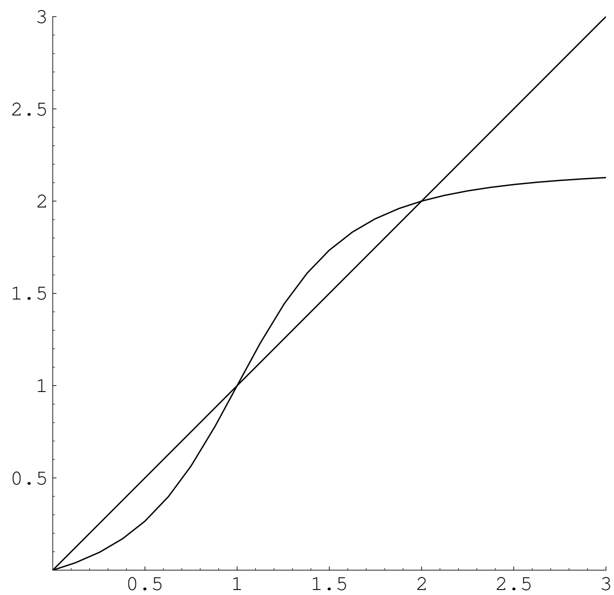
$$\det(DF(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}) - \lambda I) = \lambda(\lambda - 2) - 1 = \lambda^2 - 2\lambda - 1.$$

We zien dat $\lambda_1\lambda_2 = -1$, en ook het evenwicht $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ is instabiel.

b *Gegeven is het volgende fasediagram. Schets de Poincaré-afbeelding van de Poincaré-sectie Σ naar zichzelf.*



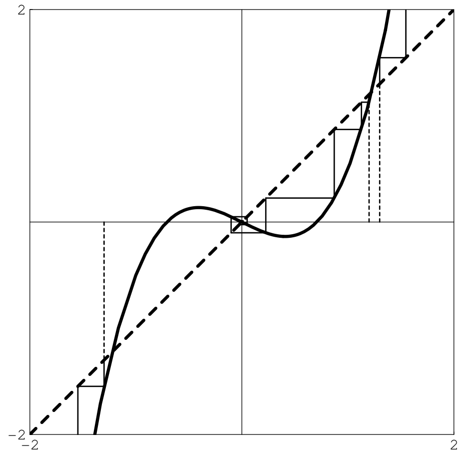
Als we de krommen nalopen, dan zien we dat de baan die het dichts bij de oorsprong begint nog dichter naar de oorsprong loopt; dan komt een gesloten baan; dan lopen banen weg van de oorsprong; dan komt weer een gesloten baan; en dan lopen banen weer naar binnen. De bijbehorende Poincaré-afbeelding is:



Opgave 4

De familie $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ van afbeeldingen wordt gegeven door $f_\lambda(x) = x^3 - \lambda x$

a *Schets de grafiek van $f_{\frac{1}{2}}$. Schets in deze grafiek een aantal illustratieve baan van het systeem $x_{t+1} = f_{\frac{1}{2}}(x_t)$ door middel van een spinnewebplot.*



b *Vind alle dekpunten van f_λ en bepaal hun stabiliteit. Geef het resultaat in een bifurcatiediagram.*

Dekpunten van f_λ voldoen aan de vergelijking $x = f_\lambda(x)$:

$$\begin{aligned} &x = x^3 - \lambda x \\ &0 = x(x^2 - \lambda - 1) \\ &x = 0 \quad \text{of} \quad x = \sqrt{1+\lambda} \quad \text{of} \quad x = -\sqrt{1+\lambda} \end{aligned}$$

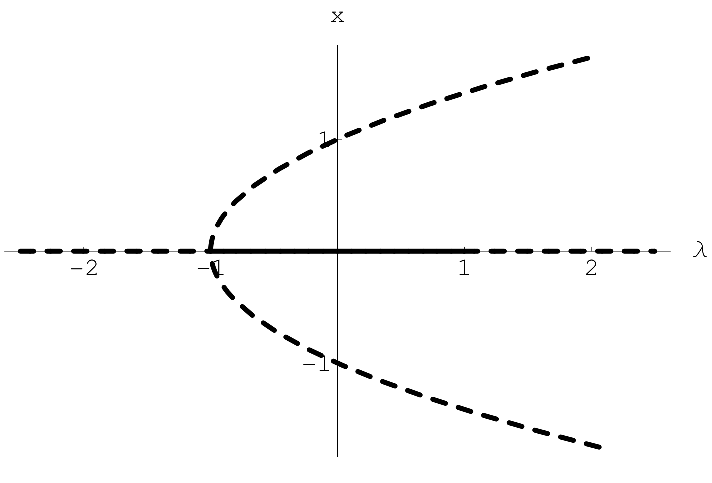
Om de stabiliteit te bepalen berekenen we de afgeleide van f_λ in de dekpunten. We vinden

$$f_\lambda'(0) = -\lambda.$$

Het dekpunt $x = 0$ is asymptotisch stabiel als $|\lambda| < 1$ en instabiel als $|\lambda| > 1$.
Verder is

$$f_\lambda'(\sqrt{1+\lambda}) = f_\lambda'(-\sqrt{1+\lambda}) = 3(1+\lambda) - \lambda = 3 + 2\lambda.$$

Merk op dat deze dekpunten alleen bestaan als $\lambda \geq -1$, en dat ze dus altijd instabiel zijn.



c *Vind met een spinnewebplot een baan van $x_{t+1} = f_2(x_t)$ die dicht bij $x = 0$ begint. Schets de bijbehorende tijdreeks in een (t, x_t)-diagram.*