FACULTEIT ECONOMIE EN BEDRIJFSKUNDE
Afdeling Kwantitatieve Economie

Inleiding Speltheorie, tentamen — **9–12 uur, vrijdag 12 juni 2009**

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven die verspreid zijn over 2 vellen papier. In totaal zijn er 52 punten te verdienen. Zie hieronder de normering per onderdeel. Een maximaal aantal punten wordt alleen toegekend indien er sprake is van een gemotiveerd en juist antwoord.

Normering									
1a	3	**2a**	3	**3a**	2	**4a**	3	**5a**	3
b	3	b	3	b	3	b	2	b	5
c	3			c	3	c	4	c	4
				d	1	d	4		
						e	3		

Het cijfer T wordt bepaald als $\min\{10, \frac{1}{5}\text{score}$. Indien het cijfer minstens 5.5 is ben je geslaagd voor dit vak. Voor dit vak is een *bonusregeling van kracht*. Indien $T \geq 5.0$ wordt het eindcijfer E bepaald als:

$$E = (1 - \frac{B}{100})T + \frac{B}{10},$$

waarbij B de te behalen bonus voorstelt. De bonus is alleen deze eerste kans geldig en komt hierna te vervallen.

Opgave 1

(a) Geef de definitie van Nash evenwicht voor een n-persoons strategisch spel.

Gegeven is een 2×2 bi-matrix spel G met gemengde uitbreiding Γ.

(b) Stel dat van de beste antwoordencorrespondenties in Γ voor speler 1 en 2 bekend is dat

$$(y, 1-y) \in B_2((y, 1-y)) \text{ voor alle } y \in [0,1]$$
$$(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \in B_1((y, 1-y)) \text{ voor alle } y \in [0,1].$$

Welke informatie geeft dit over de verzameling van mogelijke Nash evenwichten in Γ, $NE(\Gamma)$?

(c) Geef een spel G waarvoor $NE(\Gamma) = \{((1,0),(y,1-y)) \mid y \in [0, \frac{1}{4}]\}$.

Opgave 2

Gegeven is een bepaalde hoeveelheid Q van een hernieuwbaar goed, dat over twee perioden wordt genuttigd door n spelers. De spelers geven ieder voor zich en onafhankelijk aan welke positieve hoeveel van het goed ze in de eerste beurt willen nuttigen. Het profiel van individuele consumpties in beurt 1 wordt dan beschreven door $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, waarbij $x_i > 0$ de consumptie door speler i voorstelt. De overgebleven hoeveelheid regenereert dan tot

$$Q' = \lambda(Q - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n))$$

eenheden, waarbij $\lambda > 1$ een gegeven constante is. Deze hoeveelheid Q' wordt in beurt 2 gelijk onder de spelers verdeeld. Het nut van een speler i, u_i, als het aantal genuttigde eenheden in beurt 1 en 2 gegeven wordt door respectievelijk x_i en y_i is gelijk aan

$$u_i = \ln x_i + \ln y_i.$$

(a) Het hierboven beschreven spel heeft een uniek Nash evenwicht in zuivere strategiën. Bepaal deze.

(b) Bepaal de maximale sociale welvaart als deze gemeten wordt als de som van de individuele nutten. Hoe verhoudt zich de welvaart in het sociaal optimum ten opzichte van de welvaart in het Nash evenwicht bij een immer toenemend aantal spelers?

Opgave 3

Gegeven is het 2-persoons strategisch spel G : speler 1 heeft acties T en B, speler 2 heeft acties L, M, en R en de uitbetalingen bij de verschillende actiecombinaties worden gegeven door

	L	M	R
T	$1, -1$	$-4, 4$	$-3, 3$
B	$-1, 1$	$6, -6$	$\alpha, -5$

De gemengde uitbreiding van G wordt aangeduid met Γ.

(a) Voor welke waarden van α is G een strikt competitief spel? Motiveer je antwoord.

(b) Laat zien dat wanneer $\alpha \neq 5$, de gemengde uitbreiding Γ niet strikt competitief is. Motiveer je antwoord.

Zij nu $\alpha = 5$, waarmee zowel G als Γ nulsomspelen zijn.

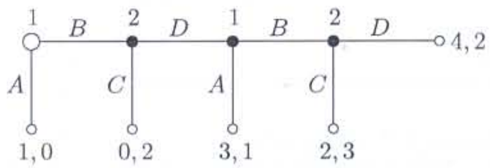
(c) Bepaal de verzameling evenwichten in gemengde strategieën, $NE(\Gamma)$.

(d) Bepaal de waarde $v(\Gamma)$.

ZIE OMMEZIJDE!!!

Opgave 4

Beschouw de spelboom bij de volgende versie van het *Centipede Game*



(a) Geef de strategische vorm bij dit spel in extensieve vorm. Is dit spel via dominantie oplosbaar?

(b) Bepaal het unieke deelspelperfecte evenwicht.

Stel nu dat speler 2 bij het realiseren van zijn actie C fouten maakt. Precieser, met kans $p > 0$ resulteert een keuze voor actie C toch uit in actie D. Speler 1 weet dat 2 fouten maakt, maar niet óf deze gemaakt is; speler 1 observeert alleen de acties. Speler 2 weet wanneer de actie niet goed is uitgevoerd.

(c) Bepaal een spelboom bij deze situatie, waarbij je de fout modeleert met behulp van een *chance node*. Neem hiervoor goed wat ruimte.

(d) Hoeveel strategieën hebben beide spelers?

(e) Hoe groot moet p minimaal zijn opdat er een Nash evenwicht bestaat waarbij speler 1 altijd B speelt?

Opgave 5

Beschouw het spel in zuivere strategieën G waarbij de payoffs voor speler 1 (rijspeler) en speler 2 (kolomspeler) gegeven worden door

	L	M	R
T	5, 5	0, 7	0, 2
C	6, 0	3, 4	0, 1
B	1, 1	1, 0	1, 1

We bekijken nu $G^\delta(2)$, het herhaalde spel G waarbij de payoffs in ronde 2 verdisconteerd worden met factor $\delta \in (0, 1)$. Dus de payoffs van speler i worden gegeven door $\pi_i = \pi_i^1 + \delta\pi_i^2$, waarbij π_i^k de payoffs zijn in ronde k.

(a) Hoeveel strategieën hebben de spelers?

(b) Er bestaat een getal δ^* zodat precies wanneer $\delta \geq \delta^*$ er een deelspelperfect evenwicht bestaat waarbij in de eerste ronde (T, L) wordt gespeeld. Bepaal δ^* en zulke deelspelperfecte evenwichten in $G^\delta(2)$.

(c) Zijn er deelspelperfecte evenwichten in $G^\delta(2)$ wanneer $\delta < \delta^*$? Zo ja, bepaal deze.