



FACULTEIT ECONOMIE EN BEDRIJFSKUNDE  
Afdeling Kwantitatieve Economie

---

---

**Inleiding Speltheorie, tentamen**

**9–12 uur, vrijdag 11 juni 2010**

---

---

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven die verspreid zijn over 2 vellen papier. In totaal zijn er 50 punten te verdienen. Zie hieronder de normering per onderdeel. Een maximaal aantal punten wordt alleen toegekend indien er sprake is van een gemotiveerd en juist antwoord.

Normering					
<b>1a</b>	2	<b>2a</b>	5	<b>3a</b>	2
<b>4a</b>	2	<b>5a</b>	5		
b	4	b	4	b	3
		c	2	c	4
				d	2
				d	4
				e	5

Het cijfer  $T$  wordt bepaald als  $\frac{1}{5} \cdot \text{score}$ . Voor dit vak is een *bonusregeling van kracht*. Indien  $T \geq 4.5$  wordt het eindcijfer  $E$  bepaald als:

$$E = \left(1 - \frac{B}{100}\right)T + \frac{B}{10},$$

waarbij  $B$  de te behalen bonus voorstelt. Indien  $E \geq 5.5$  ben je geslaagd voor dit vak. De bonus is alleen deze eerste kans geldig en komt hierna te vervallen.

## Opgave 1

- (a) Geef de definitie van Nash evenwicht voor een  $n$ -persoons strategisch spel.

Gegeven is een  $2 \times 2$  bi-matrix spel  $G$  met gemengde uitbreiding  $\Gamma$ .

- (b) Stel dat van de beste antwoordencorrespondenties in  $\Gamma$  voor speler 1 en 2 bekend is dat

$$\begin{aligned}(y, 1 - y) &\in B_2((y, 1 - y)) \text{ voor alle } y \in [0, 1] \\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) &\in B_1((y, 1 - y)) \text{ voor alle } y \in [0, 1].\end{aligned}$$

Welke informatie geeft dit over de verzameling van mogelijke Nash evenwichten in  $\Gamma$ ,  $NE(\Gamma)$ ?

## Opgave 2

Gegeven is een faciliteit voor de productie voor een deelbaar goed  $Y$ . De kostenfunctie voor de productietechnologie wordt gegeven door  $C(y) = y^2$ , dwz  $y$  eenheden  $Y$  kunnen geproduceerd worden met kosten  $C(y)$ . De faciliteit dient de  $n$  divisies van een enkele firma. Stel dat de vraag van de verschillende divisies wordt samengevat door de vector  $d \in \mathbb{R}_+^N$  waarbij  $d_i$  staat voor de vraag naar  $Y$  van divisie  $i$ . Gegeven zo'n vraagvector wordt in totaal  $d(N) = \sum_{i=1}^n d_i$  geproduceerd, en moeten bijbehorende kosten  $C(d(N))$  onder de divisies worden verdeeld. Het nut van een speler  $i$  wanneer deze een bedrag  $x_i$  betaalt voor  $d_i$  eenheden  $Y$  is

$$u_i = 2d_i - x_i.$$

- (a) Stel dat de kosten proportioneel naar de vraag worden verdeeld, oftewel het bedrag dat  $i$  betaalt voor  $d_i$  eenheden is

$$\mu_i^P(d) = \frac{d_i}{d(N)} C(d(N))$$

aangenomen dat  $d(N) > 0$ ; anders betaalt niemand iets. Bepaal het unieke Nash evenwicht van het vraagspel waarbij de divisies onafhankelijk en simultaan hun vraag kiezen.

- (b) Bekijk nu het strategische vraagspel waarbij de divisies onafhankelijk en simultaan hun vraag kiezen, en waarbij de productiekosten gelijk onder de divisies met positieve vraag worden verdeeld, oftewel het bedrag dat  $i$  met  $d_i > 0$  betaalt is  $\mu_i^E(d) = \frac{1}{m} C(d(M))$  waar  $M = \{j : d_j > 0\}$  en  $m$  is het aantal divisies met positieve vraag. Bepaal een Nash evenwicht van dit spel.

- (c) Zijn de uitkomsten in de gevonden Nash evenwichten Pareto-efficiënt? Motiveer!

ZIE OMMEZIJDE!!!

### Opgave 3

Gegeven is het nulsomspel  $G$  door

	$D$	$E$	$F$
$A$	2	2	3
$B$	-4	4	2
$C$	3	0	1

- (a) Geef voor beide spelers de maxmin strategieën.
- (b) Bepaal voor beide spelers de rationaliseerbare acties.
- (c) Bepaal  $NE(\Gamma)$  de verzameling Nash evenwichten voor  $\Gamma$ , de gemengde uitbreiding van  $G$ .
- (d) Wat is de waarde van het spel,  $v(\Gamma)$ ?

### Opgave 4

Beschouw het volgende spel in extensieve vorm met twee spelers. Speler 1 heeft de keus om speler 2 uit te dagen of niet. In het laatste geval eindigt het spel met payoffs 5 voor beide spelers. Een uitgedaagde speler 2 kan de uitdaging aangaan of ontwijken. In het laatste geval resteren de payoffs 6 voor speler 1, en 3 voor speler 2. Als speler 2 de uitdaging aangaat wordt het volgende simultane spel gespeeld – met speler 1 als rijspeler, speler 2 als kolomspeler.

	$F$	$A$
$F$	0, 0	8, 3
$A$	3, 8	5, 5

- (a) Schets een mogelijke spelboom bij dit spel in extensieve vorm. Hoeveel strategieën heeft speler 1? En speler 2? Hoeveel deelspellen zijn er?
- (b) Geef de (gereduceerde) strategische vorm  $\kappa$  bij dit spel.
- (c) Is  $\kappa$  oplosbaar (mbt zwakke dominantie)?
- (d) Bepaal de Nash evenwichten in dit spel. Welke daarvan zijn deelspelperfect?
- (e) Geef een deelspelperfekt evenwicht in de gemengde uitbreiding, waarbij beide spelers randomiseren. Geef een beschrijving van deze gemengde strategie in termen van een equivalente gedragsstrategie (*behavioral strategy*).

ZIE OMMEZIJDE!!!

## Opgave 5

Beschouw het volgende onderhandelingsspel tussen 2 spelers over maximaal drie perioden. De spelers doen elkaar beurtelings een aanbod voor de verdeling van 1 eenheid van een perfect deelbaar goed. De waarde van de te verdelen eenheid neemt iedere beurt af, er is een *disconto factor*  $\delta \in (0, 1)$ . Het spel gaat als volgt.

**Periode 1:** speler 1 doet speler 2 een bod  $m_1 \in [0, 1]$ . Speler 2 heeft de optie accepteren (A) of weigeren (W). Als 2 accepteert, dan levert dit de payoffs  $(1 - m_1, m_1)$  en het spel is ten einde. Als speler 2 weigert, dan gaat het spel naar periode 2.

**Periode 2:** speler 2 biedt speler 1  $m_2 \in [0, 1]$  aan. Speler 1 heeft de opties om het bod aan te nemen (A) of te weigeren (W). Indien het bod door speler 1 geaccepteerd wordt, dan ontvangen de spelers de verdisconteerde payoffs  $(\delta m_2, \delta (1 - m_2))$  en eindigt het spel. Als speler 1 weigert, dan gaat het spel naar periode 3.

**Periode 3:** speler 1 biedt speler 2  $m_3 \in [0, 1]$  aan. Speler 2 heeft de optie om het bod te weigeren of te accepteren. Indien hij deze accepteert, resulteert dat in de (opnieuw) verdisconteerde payoffs  $(\delta^2 (1 - m_3), \delta^2 m_3)$ , en het spel eindigt. Als hij weigert dan krijgen de spelers niets en is het spel ook ten einde.

- (a) Bepaal het unieke deelspelerperfekte evenwicht van dit spel.
- (b) In het deelspelerperfekte evenwicht is er 1 speler met een hogere payoff, ongeacht  $\delta$ . Welke speler is dat?