Inleiding speltheorie 11-06-2010

Opgave 1:

(a) Zie boek.

(b) Er geldt: $NE(\Gamma) = \{((p, 1-p), (q, 1-q)) \mid p \in [0,1], q \in [0,1]\}$.

Uit $(y, 1-y) \in B_2((y, 1-y))$ volgt: $\mathbb{E}u_2(L \mid y) = \mathbb{E}u_2(R \mid y)$

$\Leftrightarrow y e + (1-y) \cdot g = y \cdot f + (1-y \cdot h$ voor alle $y \in [0,1]$.

	L	R
T	a,e	b,f
B	c,g	d,h

Neem twee verschillende y en los op, dan vind je $e = f$ en $g = h$.

Maar dan $B_2((y, 1-y)) = (q, 1-q) \quad q \in [0,1]$.

Uit $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in B_1((y, 1-y)) \ \forall y \in [0,1)$ volgt dat

$\mathbb{E}u_1(T \mid y) = \mathbb{E}(B \mid y)$ voor alle y en dus

dat $B_1((y, 1-y)) = (p, 1-p) \quad p \in [0,1]$. $\boxtimes$.

Opgave 2:

(a) $u_i(d) = 2d_i - \frac{d_i}{d(N)} \cdot C(d(N)) = 2d_i - d_i \cdot d(N)$

$\frac{\partial}{\partial d_i} u_i(d) = 2 - d(N) - d_i = 0 \quad \forall i \Rightarrow$

$n(2 - d(N)) - d(N) = 0 \Leftrightarrow d(N) = \frac{2n}{n+1}$

$\Rightarrow d_i^* = 2 - \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{n+1}$. Merk op dat $\frac{\partial^2}{(\partial d_i)^2} u_i(d) = -2 < 0 \quad \forall d$.

Uniek NE: d^* met $d_i^* = \frac{2}{n+1}$.

(b) $u_i(d) = \begin{cases} 2d_i - \frac{1}{m}(d(M))^2 & \text{als } d_i > 0 \\ 0 & \text{als } d_i = 0. \end{cases}$

Indien in evenwicht geldt $d_i > 0$, dan

1) $\dfrac{\partial u_i(d)}{\partial d_i} = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{2}{m} d(M) = 0 \Leftrightarrow d(M) = m$

2) $u_i(d) \geq u_i(d_{-i}, 0) \Leftrightarrow d_i \geq \frac{m}{2}$

Conclusie $\sum_{j \in M} d_j = d(M) = m$ en

$d_i \geq \frac{m}{2}$ voor alle $i \in M$.

Dit is alleen mogelijk indien $m = 0, 1,$ of 2

$m=0$: $\rightarrow$ kan geen evenwicht opleveren, nl

$u_i((0_{-i}, \tfrac{1}{2})) = 2 \cdot \tfrac{1}{2} - (\tfrac{1}{2})^2 > 0 = u_i(0)$.

$m=1$: er is precies 1 agent met positieve vraag, zeg $d_1 = 1$

er geldt $u_j((d^*_{-j}, d_j)) = -\tfrac{1}{2} + d_j - \tfrac{1}{2} d_j^2 \leq 0$ voor alle $d_j \geq 0$, dus een agent met vraag 0 kan zich niet verbeteren.

Evenwichten: $(1, 0 \sim 0), (0, 1, 0 - 0) \ldots (0, - 0, 1)$.

$m=2$: er zijn $i, j \in N$ met $d_i = d_j = 1$, $d_k = 0 \ \forall k \neq i, j$.

Alle spelers hebben nut 0 en kunnen zich niet verbeteren.

(c). Sociaal optimum

$$\arg\max_{y\geq 0} \{2y - y^2\} = 1$$

Stel $d' \in \mathbb{R}^N$, $d'_i = \frac{1}{n}$ $\forall i \in N$.

Dan heeft iedere speler nut $u_i(d') = \frac{2}{n} - \frac{1}{n}\left(\cancel{2n}\ 1\right)^2 = \frac{1}{n}$

In het proportionele evenwicht geldt:

$$u_i(d^*) = 2\cdot\frac{2}{n+1} - \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2n}{n+1}\right)^2 = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}$$

dus d^* is zeker niet Pareto-efficiënt.

Net zo vallen in het spel met egalitaire verdeelregel de evenwichten met precies 2 positieve vragen af, wel hier hebben alle spelers nut $0 < \frac{1}{n}$.

De evenwichten waar precies één speler actief is met vraag 1 is Pareto-efficiënt.

Opgave 3:

(a)

	D	E	F
A	2	2	$\boxed{3}$
B	-4	$\boxed{4}$	2
C	$\boxed{3}$	0	1

Payoffs zijn die van speler 1!

cirkels: beste acties speler 2, gegeven rij actie speler 1

A is maxmin strategie speler 1.

vierkantjes: beste acties speler 1, gegeven kolom actie speler 2

D en F zijn speler 2's maxmin strategieën.

(b). speler 1: $C \in B_1(D)$, $B \in B_1(E)$, $A \in B_1(F)$.

speler 2: $D, E \in B_2(A)$, $\cancel{B}\ D \in B_2(B)$, $E \in B_1(C)$

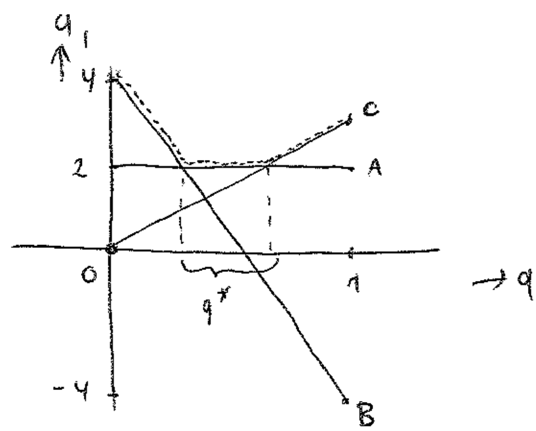
F geen best response.

(b) Speler 1 kiest alleen A als best response op F, die nooit best response is. → A vervalt voor speler 1.

B, C zijn rationaliseerbaar voor speler 1
D, E zijn rationaliseerbaar voor speler 2.

(c). F is nooit beste antwoord en wordt door gemengde strategieën $(\alpha, 1-\alpha, 0)$ gedomineerd (strict) voor $\alpha \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$. We mogen ons dus beperken tot

	q D	E $1-q$
A	2	2
B	-4	4
C	3	0



Uit de rechterfiguur blijkt dat $(q^*, 1-q^*, 0)$ maxminimaliserend is voor speler 2 als maar

$$-4q^* + 4(1-q^*) \leq 2 \quad \text{èn}$$
$$3q^* + 0(1-q^*) \leq 2$$

dwz $q^* \in [\frac{1}{4}, \frac{2}{3}]$. Voor deze q^*'s hebben we dus (?) de strategieën voor speler 2 in evenwicht.

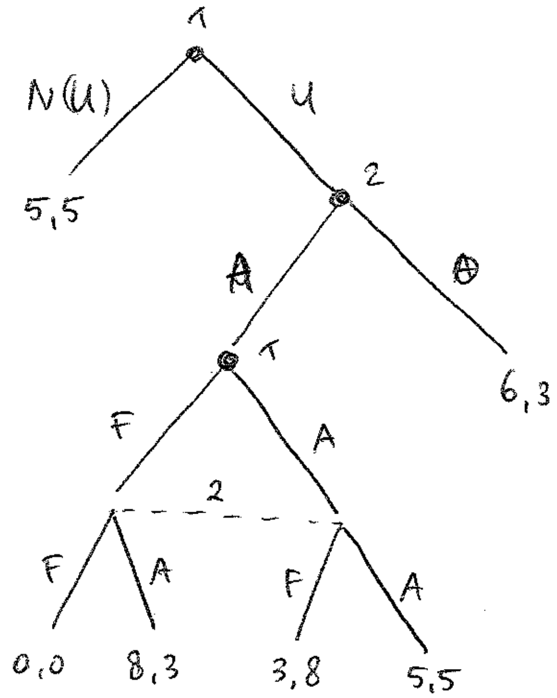
Als evenwichten vinden we $NE(\Gamma) = \{((1,0,0), (q^*, 1-q^*, 0)) \mid q^* \in [\frac{1}{4}, \frac{2}{3}]\}$

Merk op dat voor $q^* = \frac{1}{4}$ in evenwicht niet door speler 1 zowel A als B gebruikt kan worden; ten opzichte van deze drager wordt E door D gedomineerd. Net zo is voor $q^* = \frac{2}{3}$ niet de drager $\{A, C\}$ mogelijk, want dan zou speler 2 met kans 1 E spelen.

(d) Waarde van het spel $v(\Gamma) = U_1(A, (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0)) = 2$.

Opgave 4:

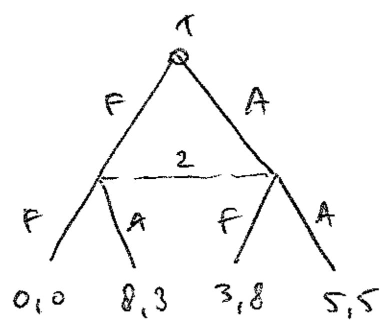
(a)

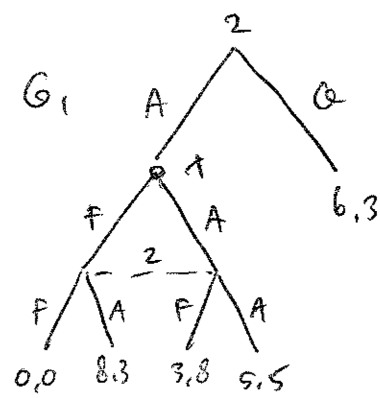


Speler 1 heeft strategieën
NF, NA, UF, UA
speler 2 heeft strategieën
AF, AA, OF, OA

Deelspellen: #=3

G_0





en Γ zelf.

(b) Gereduceerde strategische vorm

	AF	AA	OA
N	5,5	5,5	5,5
UF	0,0	8,3	6,3
UA	3,8	5,5	6,3

(c)

	②	①
~~5,5~~	~~5,5~~	~~5,5~~
① ~~0,0~~	~~8,3~~	~~6,3~~
~~3,8~~	~~5,5~~	~~6,3~~

	③	AA	①
④	~~5,5~~	~~5,5~~	~~5,5~~
UF	0,0	8,3	6,3
②	~~3,8~~	~~5,5~~	~~6,3~~

① $O \precsim_2 AA$

② $UA \precsim_1 N$

③ $AF \precsim_2 AA$

④ $N \precsim_1 UF$

(d) Nash evenwichten bij (N, AF): (NF, AF)
(NA, AF)

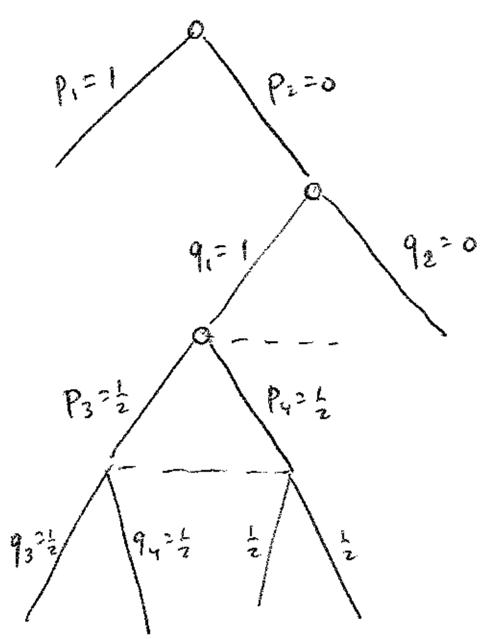
Verder (UF, AA), en bij (UF, O): (UF, OA)
(UF, OF).

Deelspelperfect daarvan: (NA, AF)
(UF, AA)
(UF, OA)

(e) In het bi-matrix spel is er nóg een evenwicht, in gemengde strategieën: $((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$.

Dit levert in het deelspel payoffs (4, 4).
Dan speelt speler 2 in G_1: $(A, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$
en in het totale spel speelt speler 1: $(N, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$.

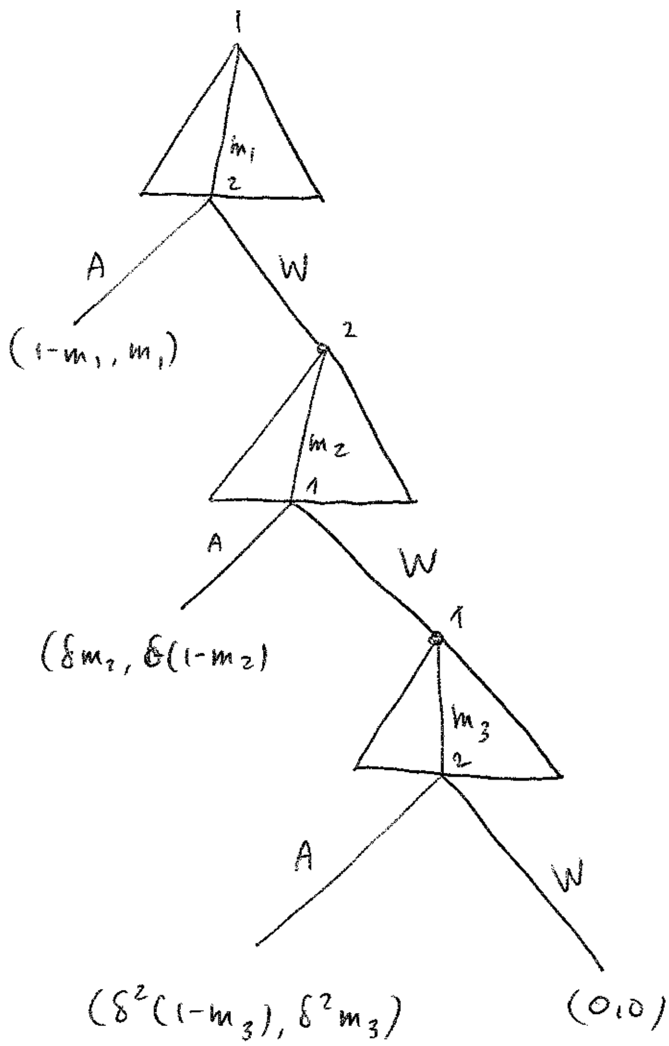
Behavioral strategy: speler 1: $((1,0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$
speler 2: $((1,0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$



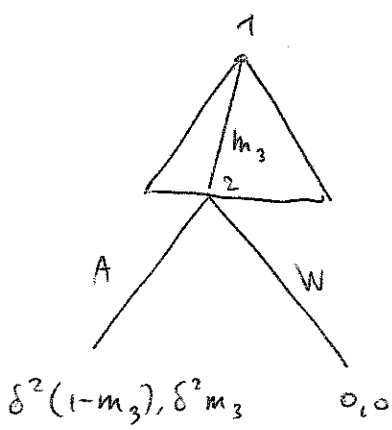
In dit geval zijn dat dus met strategieën vgl.

Opgave 5

Een schets van de spelboom:



Onderscheid deelspel:

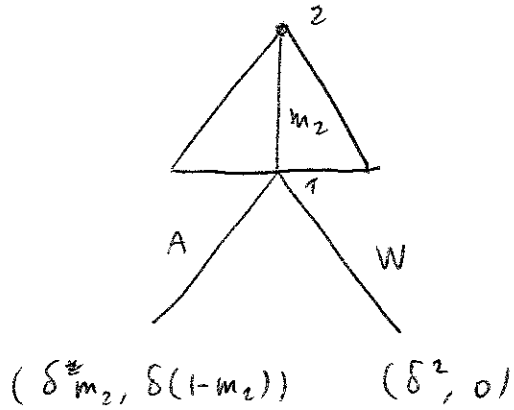


net als in Ultimatum game, uniek deelspelperfect evenwicht

speler 1 : $m_3 = 0$

speler 2: altijd A, na iedere m_3.

Resultaat spel : $(\delta^2, 0)$.

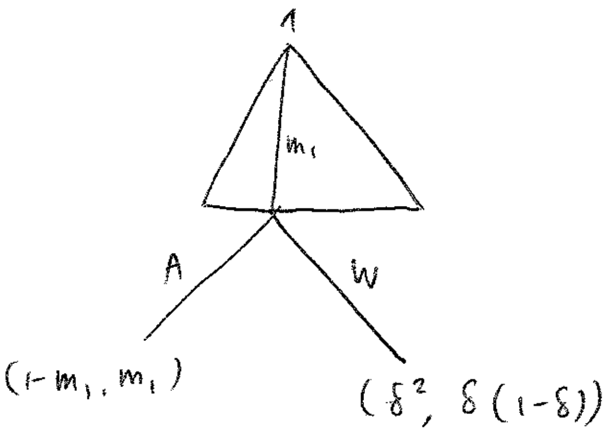


Speler 2 kiest m_2 zodanig dat speler 1 accepteert, $m_2 = \delta$

speler 2 : $m_2 = \delta$

speler 1 : $m_2 < \delta$: W

$m_2 \geq \delta$: A.



speler 2 : $m_1 < \delta(1-\delta)$: W

$m_1 \geq \delta(1-\delta)$: A.

speler 1 : $m_1 = \delta(1-\delta)$

Resultaat : $(1-\delta(1-\delta), \delta(1-\delta))$

(b) Er geldt : $\max\limits_{\delta\in(0,1)} \delta(1-\delta) = \frac{1}{4} < \frac{3}{4} = \max\limits_{\delta\in(0,1)} (1-\delta(1-\delta))$.