

Tentamen Kres 3, 5 november 2010, 09.00–12.00

Motiveer uw antwoorden, antwoorden zonder motivatie worden niet goed gerekend. Denk aan de dragers. Ieder onderdeel is 10 punten waard. Bij het tentamen mag alleen gebruik worden gemaakt van een (zelf mee te nemen) onbeschreven kopie van Appendix B van Bain en Engelhardt.

1. Beschouw de stochasten (X, Y, Z) met joint pdf

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = \frac{c}{xy}, \quad 0 < z < y < x < 1$$

- (a) Toon aan dat $c = 1$ en bereken $E[X|Y = y]$.
- (b) Welke verdeling volgt $U = -\log Y$?
- (c) Bepaal de pdf van $W = \frac{Y}{X}$. Zijn X en W s.o?

2. Laat $X \sim \text{HYP}(2, 3, 5)$ zijn.

- (a) Bereken de moment voortbrengende functie van X , $M_X(t)$.
- (b) Wat is de verdeling van $Y = (1 - X)^2$?

3. Gegeven: X_1, \dots, X_n zijn onafhankelijk en verdeeld volgens de pdf

$$f(x) = \frac{3x^2}{\theta^3}, \quad 0 < x < \theta$$

- (a) Laat zien dat $X_{n:n}$ in waarschijnlijkheid naar θ convergeert: $X_{n:n} \xrightarrow{p} \theta$.
- (b) Bereken de limietverdeling van $Y_n = n(\theta - X_{n:n})$.
- (c) Beschouw het geval $n = 2$. Geef de joint pdf van $(S, T) = (X_{1:n}, X_{n:n})$ en bereken $\text{Cov}(S, T)$.

4. Laat X_1, \dots, X_n onafhankelijke $N(2, 1)$ stochasten zijn.

- (a) Bepaal de limietverdeling van

$$Y_n = \sqrt{n} \left((\bar{X}_n)^2 - 4 \right), \quad \text{met } \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

- (b) Geef aan hoe men met behulp van een tabel voor de F-verdeling de volgende kans kan bepalen (voor $n \geq 6$):

$$P \left[\frac{(X_1 - X_2)^2}{(X_1 - X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2 + (X_5 - X_6)^2} \leq \frac{1}{2} \right].$$

Succes!!!