

Tentamen Kres 3, 120603, 09.30–12.30

Motiveer uw antwoorden, antwoorden zonder motivatie worden niet goed gerekend. Geef duidelijke omschrijvingen van het geldigheidsgebied van uw antwoorden. Ieder onderdeel is 10 punten waard. Bij het tentamen mag alleen gebruik worden gemaakt van een (zelf mee te nemen) onbeschreven kopie van Appendix B van Bain en Engelhardt.

1. Beschouw drie stochasten, X , Y en Z met de volgende joint pdf:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c(x+y)e^{-x-y-z}, & \text{voor } x, y, z > 0 \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$$

- (a) Bereken c en de marginale pdf van Y , $f_Y(y)$.
- (b) Bereken $E[Y|X = x]$ en $\text{Cov}(X, Y)$.
- (c) Bepaal de joint pdf van $V = X - Y$ en $W = X + Y$. Zijn V en W s.o.?

2. Gegeven: X_1 en X_2 zijn stochastisch onafhankelijk en $\text{EXP}(\theta)$ verdeeld.

- (a) Geef de joint pdf van $Y = X_1 + 2X_2$ en $Z = X_1 - 2X_2$.
- (b) Bereken de joint MGF, $M_{Y,Z}(s, t) = E[e^{sY+tZ}]$, van Y en Z . Zijn Y en Z s.o.?

3. Laat X_1, \dots, X_n onafhankelijke stochasten zijn, verdeeld volgens de volgende CDF:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2}, & \text{voor } x > 1 \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) Heeft $\frac{1}{\sqrt{n}}X_{n:n}$ een limietverdeling? Zo ja welke?
- (b) Laat zien dat $X_{1:n} \xrightarrow{p} 1$ en bepaal de limietverdeling van $n(X_{1:n} - 1)$.
- (c) Bereken $E\left[\frac{1}{X_{n:n}^2}\right]$ voor positieve, eindige n .

4. Gegeven is dat X en Y stochastisch onafhankelijk en $N(0, 1)$ verdeeld zijn.

- (a) Geef aan hoe men met behulp van een tabel van een F -verdeling de volgende kans kan berekenen:

$$P\left[\frac{X^2 - Y^2}{X^2 + Y^2} < \frac{1}{2}\right]$$

- (b) Laat zien dat $X^2 + Y^2$ en $\frac{X^2}{X^2 + Y^2}$ stochastisch onafhankelijk zijn.

Succes!!!