

Tentamen Kres 3, 170610, 09.00–12.00

Motiveer uw antwoorden, antwoorden zonder motivatie worden niet goed gerekend. Denk aan de dragers. Ieder onderdeel is 10 punten waard. Bij het tentamen mag alleen gebruik worden gemaakt van een (zelf mee te nemen) onbeschreven kopie van Appendix B van Bain en Engelhardt.

1. Gegeven is de volgende joint pdf

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x^2 + y^2)e^{-x-y-z}, & x, y, z > 0 \\ \text{elders.} & \end{cases}$$

- Bereken $E[Y|X = x]$.
- Bepaal $\text{cov}(X, Y)$.
- Toon aan dat X en Z s.o. zijn, en leid de pdf $f_W(w)$ van $W = X + Z$ af.

2. Van (X, Y) is de MGF gegeven:

$$M_{X,Y}(s, t) = \exp \{s^2 + t^2 - st\}.$$

- Geef de joint MGF van (V, W) waarbij $V := X + Y$, $W := X + aY$. Voor welke waarde(n) van a zijn V en W s.o.?
- Wat is de verdeling van $\frac{1}{2}Y^2$?

3. Laat X en Y s.o. zijn met $X \sim \text{GAM}(\theta, 2)$ en $Y \sim \text{GAM}(\theta, 3)$.

- Beschrijf hoe u met behulp van een tabel van de F -verdeling de volgende kans kunt bepalen:

$$\mathbb{P} \left[\frac{X}{X+Y} < 0.4 \right].$$

- Toon aan dat $\frac{X}{X+Y}$ en $X+Y$ s.o. zijn.

4. Beschouw een steekproef X_1, \dots, X_n uit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3\theta^3}{x^4}, & x > \theta \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

- Toon aan dat $X_{1:n} \xrightarrow{p} \theta$.
- Heeft $Y_n = n(X_{1:n} - \theta)$ een limietverdeling? Zo ja, welke?
- Geef de limietverdeling van

$$2\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \frac{3}{2}\theta}{\sqrt{3}X_{1:n}},$$

waarin \bar{X}_n het steekproefgemiddelde is.

Succes!!!