

Tentamen Kres 3, 220104, 09.30–12.30

Motiveer uw antwoorden, antwoorden zonder motivatie worden niet goed gerekend. Geef duidelijke omschrijvingen van het geldigheidsgebied van uw antwoorden. Ieder onderdeel is 10 punten waard. Bij het tentamen mag alleen gebruik worden gemaakt van een (zelf mee te nemen) onbeschreven kopie van Appendix B van Bain en Engelhardt.

1. Stel, X , Y en Z hebben de joint pdf: $f_{X,Y,Z}(x, y, z) = c(x + y)ze^{-z}$ voor $0 < y < x < 1$, $z > 0$, en nul elders.

- (a) Laat zien dat $c = 2$ en bereken de marginale pdf van Y , $f_Y(y)$.
- (b) Bereken $E[Y|X = x]$ en $\text{Cov}(X, Y)$.
- (c) Bepaal de joint pdf van $V = X$ en $W = X + Y$. Zijn V en W s.o?

2. Laat X_1 en X_2 twee onafhankelijke $N(0, 1)$ verdeelde stochasten zijn.

- (a) Bepaal de MGF $M_V(s)$ van $V = X_1^2 + X_2^2$ en laat zien dat $V \sim \text{EXP}(2)$. [Hint: wat is de verdeling van X_i^2 , $i = 1, 2$?]
- (b) Bereken de gemeenschappelijke MGF $M_{V,W}(s, t)$ van $V = X_1^2 + X_2^2$ en $W = X_1^2 - X_2^2$. Zijn V en W s.o?

3. X_1, \dots, X_n is een steekproef uit een verdeling met pdf:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3}, & \text{voor } 0 < x < \theta \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) Bewijs dat $X_{n:n} \xrightarrow{p} \theta$.
- (b) Bepaal de limietverdeling van $nX_{1:n}$.
- (c) Heeft $Y_n = \sqrt{n} \frac{1}{X_{n:n}^3} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^3 - \frac{1}{2}\theta^3 \right)$ een limietverdeling? Zo ja, welke?

4. Gegeven: X_1, \dots, X_4 zijn stochastisch onafhankelijk en $\text{GAM}(\theta, 2)$ verdeeld.

- (a) Geef aan hoe men met behulp van een tabel van de F-verdeling de volgende kans kan berekenen:

$$P \left[\frac{X_1 + X_2 - X_3 - X_4}{X_1 + X_2 + X_3 + X_4} < \frac{1}{4} \right].$$

- (b) Laat $V = X_1 + X_2$ en $W = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$, en bepaal hun joint pdf $f_{V,W}(v, w)$. Zijn V en W s.o?

Success!!!