

Tentamen Kres 3, 301003, 09.30–12.30

Motiveer uw antwoorden, antwoorden zonder motivatie worden niet goed gerekend. Geef duidelijke omschrijvingen van het geldigheidsgebied van uw antwoorden. Ieder onderdeel is 10 punten waard. Bij het tentamen mag alleen gebruik worden gemaakt van een (zelf mee te nemen) onbeschreven kopie van Appendix B van Bain en Engelhardt.

1. Beschouw drie stochasten, X , Y en Z met de volgende joint pdf:

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = \begin{cases} c(x + y + z)e^{-x-y-z}, & \text{voor } x, y, z > 0 \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$$

- (a) Toon aan dat $c = 3$ en bereken de marginale pdf van Z , $f_Z(z)$.
(b) Bereken $E[Y|X = x]$ en $\text{Cov}(X, Y)$.
(c) Bepaal de joint pdf van $V = X + Y + Z$ en $W = X + Y$. Zijn V en W s.o.?

2. Gegeven: X_1, \dots, X_{10} zijn stochastisch onafhankelijk en $\text{EXP}(2)$ verdeeld.

- (a) Wat is de verdeling van $S = \sum_{i=1}^{10} X_i$?
(b) Geef de joint pdf van $(X_1, \frac{X_1}{S})$. Zijn X_1 en $\frac{X_1}{S}$ s.o.?

3. Stel: $(X, Y) \sim \text{BVN}(0, 0, 1, 1, \frac{1}{\sqrt{2}})$. De bijbehorende pdf is $f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{1}{2}}} \exp[-x^2 + \sqrt{2}xy - y^2]$, en de MGF $M_{X,Y}(s, t) = \exp[\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}st]$. Verder: laat $V = X$, $W = \sqrt{2}Y - X$.

- (a) Laat zien dat V en W s.o. zijn.
(b) Wat is de verdeling van $V^2 + W^2$?

4. X_1, \dots, X_n is een steekproef uit een verdeling met PDF:

$$f_X(x) = \begin{cases} \theta x^{-2}, & \text{voor } x > \theta \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) Laat zien dat $X_{1:n} \xrightarrow{p} \theta$.
(b) Bepaal de limietverdeling van $n(X_{1:n} - \theta)$.
(c) Bereken $E\left[\frac{1}{X_{n:n}}\right]$ voor positieve, eindige n . [Hint: transformeer naar een handige variabele.]

Succes!!!