Tentamen KReS 3, 30 oktober 2009, 09.00–12.00

<u>Motiveer uw antwoorden</u>, antwoorden zonder motivatie worden niet goed gerekend. <u>Denk aan de dragers.</u> Ieder onderdeel is 10 punten waard. Bij het tentamen mag alleen gebruik worden gemaakt van een (zelf mee te nemen) <u>onbeschreven</u> kopie van Appendix B van Bain en Engelhardt.

1. Het paar **<u>discrete</u>** stochasten (X, Y) met drager $x = 0, 1, 2, \ldots$, en $y = x, x+1, x+2, \ldots$ heeft pdf
$$f_{X,Y}(x, y) = c \left(\frac{1}{2}\right)^{x+y}.$$
   (a) Bereken c en geef de marginale pdf's $f_X(x)$ en $f_Y(y)$ van X en Y.
   (b) Wat is de joint pdf van $V = X$ en $W = Y - X$. Zijn V en W s.o?
   (c) Laat $W = Y - X$. Bepaal de MGF $M_W(t)$ en met behulp daarvan $E(W)$. [Als u $f_W(w)$ niet weet, neem dan aan dat $f_W(w) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^w$, $w = 0, 1, 2, \ldots$.]

2. Beschouw een steekproef $X_1, \ldots X_n$ $(n \geq 4)$ uit de $N(\mu, 1)$-verdeling. Zoals gebruikelijk stellen $X_{1:n}$ en $X_{n:n}$ de kleinste en resp. grootste steekproefwaarden voor, $\overline{X}_n$ het steekproefgemiddelde en S_n^2 de steekproefvariantie.
   (a) Bereken de voorwaardelijke kans $P(X_{1:n} > \mu | X_{n:n} > \mu)$.
   (b) Welke bekende verdelingen volgen de volgende grootheden?
      (i) $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$
      (ii) $\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right)/S_n$
      (iii) $(X_1 - X_2)^2/(X_3 - X_4)^2$.

3. $X_1, \ldots, X_n$ zijn stochastisch onafhankelijk en identiek verdeeld volgens de pdf
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1+3x^2}{4}, & \text{voor } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$
   (a) Toon aan dat $X_{n:n} \xrightarrow{P} 1$.
   (b) Bepaal de limietverdeling van $n(1 - X_{n:n})$.
   (c) Wat is de limietverdeling van $\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n}{X_{n:n}}$?

4. Gegeven: X_1 en X_2 zijn stochastisch onafhankelijk en EXP(θ) verdeeld.
   (a) Geef met behulp van Jensen's ongelijkheid een afschatting (boven- of ondergrens) voor $E(X_1^2)$. Bereken vervolgens $E(X_1^2)$ exact en controleer of de ongelijkheid van Jensen inderdaad opgaat in dit geval.
   (b) Toon aan dat X_1/X_2 een F-verdeling volgt. Welke?

Succes!!!

Oplossingen

1. (a)

$$f_X(x) = c\sum_{y=x}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x+y} = c\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i} = 2c\left(\frac{1}{2}\right)^{2c}, \quad x = 0,1,2,\ldots$$

$$1 = 2c\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{x} = 2c\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{8}{3}c \Rightarrow c = \frac{3}{8}.$$

$$f_Y(y) = c\sum_{x=0}^{y}\left(\frac{1}{2}\right)^{x+y} = c\left(\frac{1}{2}\right)^{y}2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{y+1}\right), \quad y = 0,1,2,\ldots$$

(b)

$$\begin{aligned} P(V=v, W=w) &= P(X=v, Y-X=w) = P(X=v, Y=v+w) \\ &= c\left(\frac{1}{2}\right)^{2v+w}, \quad v,w = 0,1,2,\ldots \end{aligned}$$

dit is het product van een functie van v en een functie van w, en de drager is een Cartesisch product, dus zijn V en W s.o.

(c) Uit (a) volgt dat $f_W(w) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^w$.

$$M_W(t) = E(e^{tW}) = \frac{1}{2}\sum_{w=0}^{\infty}e^{tw}\left(\frac{1}{2}\right)^{w} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^t} = \frac{1}{2-e^t}.$$

$$M_W(0)' = ((2-e^{-t})^{-1})' \mid_{t=0} = e^t(2-e^t)^{-2} \mid_{t=0} = 1.$$

Voor de andere pdf die men mocht gebruiken geldt: $f_W(w) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^w$.

$$M_W(t) = E(e^{tW}) = \frac{2}{3}\sum_{w=0}^{\infty}e^{tw}\left(\frac{1}{3}\right)^{w} = \frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^t} = \frac{2}{3-e^t}.$$

$$M_W(0)' = (2(3-e^{-t})^{-1})' \mid_{t=0} = 2e^t(3-e^t)^{-2} \mid_{t=0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

2. (a)

$$\begin{aligned} P(X_{1:n} > \mu | X_{n:n} > \mu) &= \frac{P(X_{1:n}>\mu, X_{n:n}>\mu)}{X_{n:n}>\mu)} \\ &= \frac{P(X_{1:n}>\mu)}{X_{n:n}>\mu)} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}. \end{aligned}$$

(b) (i)

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

waarbij $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = 1$.

(ii)

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \sim t(n-1)$$

omdat $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \sim N(0,1)$ en de noemer is daarvan onafhankelijk en de wortel van een $\chi^2(n-1)$-stochast gedeeld door z'n eigen aantal vrijheidsgraden, omdat $(n-1)S_n^2/\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.

(iii) $X1 - X_2 \sim N(0,2)$ is onafhankelijk van $X3 - X_3 \sim N(0,2)$, dus is

$$(X_1 - X_2)^2/(X_3 - X_4)^2 = ((X_1 - X_2)^2/2)/((X_3 - X_4)^2/2)$$

een breuk van twee onafhankelijke $\chi^2(1)$-stochasten, en die volgt een $F(1,1)$-verdeling.

3. De CDF bepalen

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{1+3s^2}{4}\, ds = \frac{2+x+x^3}{4}, \quad -1 < x < 1.$$

(a)

$$\begin{aligned} P[|X_{n:n} - 1| < \epsilon] &= P[1 - X_{n:n} < \epsilon] = P[X_{n:n} > 1 - \epsilon] = 1 - P[X_{n:n} \leq 1 - \epsilon] \\ &= 1 - [F_X(1-\varepsilon)]^n = 1 - \left[\tfrac{2+(1-\varepsilon)+(1-\varepsilon)^3}{4}\right]^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \end{aligned}$$

voor $0 < \epsilon < 2$ omdat $0 < F_X(1-\varepsilon) < 1$ voor $0 < \varepsilon < 2$ (en dus gaat de kans zeker naar 1 voor $\epsilon \geq 2$).

(b) Laat $Y_n = n(1 - X_{n:n})$. De bijbehorende rij van CDFs is

$$\begin{aligned} G_n(y) = P\left(n(1-X_{n:n}) \leq y\right) &= P\left(1 - X_{n:n} \leq \frac{y}{n}\right) = P\left(X_{n:n} \geq 1 - \frac{y}{n}\right) \\ &= 1 - P\left(X_{n:n} < 1 - \frac{y}{n}\right) \\ &= 1 - \left(F_X\left(1 - \frac{y}{n}\right)\right)^n \\ &= 1 - \left(\frac{2 + (1-\frac{y}{n}) + (1-\frac{y}{n})^3}{4}\right)^n \\ &= 1 - \left(1 - \frac{y}{n} + \frac{b(n)}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \mathrm{e}^{-y}, \quad y > 0 \end{aligned}$$

waarbij $b(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, dus $Y_n \xrightarrow{d} Y \sim \mathrm{EXP}(1)$.

(c) Omdat $X_{n:n} \xrightarrow{P} 1$ hebben $V_n = \sqrt{\bar{X}_n}/X_{n:n}$ en $W_n = \sqrt{\bar{X}_n}$ dezelfde limietverdeling. Er geldt $E(X) = 0$ (symmetrie) en $E(X^2) = \int_{-1}^1 \frac{x^2+3x^4}{4}\, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{12} + \frac{3x^5}{20}\right]_{x=-1}^1 = \frac{1}{6} + \frac{3}{10} = \frac{28}{60} = \frac{7}{15}$. Volgens de CLS geldt

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n}{\sqrt{\frac{7}{15}}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1),$$

waaruit volgt dat $W_n \xrightarrow{d} \sqrt{\frac{7}{15}}Z \sim N(0, 7/15)$. Concludeer dat tevens $V_n \xrightarrow{d} \sqrt{\frac{7}{15}}Z \sim N(0, 7/15)$.

4. (a) $X_1 \sim \mathrm{EXP}(\theta)$. De functie $u(s) = s^2$ is convex dus (Jensen)

$$E(X^2) \geq (E(X))^2.$$

We weten $E(X) = \theta$ en $E(X^2) = (E(X))^2 + \mathrm{Var}(X) = \theta^2 + \theta^2 = 2\theta^2$. Omdat

$$2\theta^2 > \theta^2$$

gaat Jensen's ongelijkheid dus op (met sctricte ongelijkheid).

(b) $X_i \sim \mathrm{GAM}(\theta, 1)$, dus $2X_i/\theta \sim \chi^2(2)$. Er geldt

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{\frac{2X_1}{2\theta}}{\frac{2X_2}{2\theta}} \sim F(2, 2)$$

omdat teller en noemer onafhankelijk $\chi^2(2)$ zijn, gedeeld door hun eigen aantal vrijheidsgraden.