

Tentamen Kres 3, 220606, 09.30–12.30

Motiveer uw antwoorden, antwoorden zonder motivatie worden niet goed gerekend. Denk aan de dragers. Ieder onderdeel is 10 punten waard. Bij het tentamen mag alleen gebruik worden gemaakt van een (zelf mee te nemen) onbeschreven kopie van Appendix B van Bain en Engelhardt.

1. Gegeven is de volgende joint pdf

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c(1-x)e^{-y/x}, & 0 < x < 1, \quad y > 0 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- Bepaal de constante c en de marginale pdf $f_X(x)$.
- Bereken $E(Y|X=x)$ en $\text{Cov}(X, Y)$.
- Laat $W = Y/X$. Bepaal de joint pdf $f_{X,W}(x, w)$ van (X, W) . Zijn X en W s.o?

2. Stel X en Y zijn bivariaat normaal verdeeld met pdf

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{(x^2 + y^2 - 2\rho xy)}{2(1-\rho^2)}\right), \quad -\infty < x, y < \infty.$$

De bijbehorende MGF is: $M_{X,Y}(s, t) = \exp(\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}t^2 + \rho st)$.

- Bepaal de voorwaardelijke pdf van Y gegeven $X = 0$.
- Bereken de MGF $M_{V,W}(s, t)$ waarbij $V = X + Y$ en $W = X - Y$. Voor welke waarde(n) van ρ zijn V en W s.o?

3. Laat X_1, \dots, X_n s.o. zijn met pdf

$$f_X(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2}, & x > 0 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- Laat zien dat $X_{1:n} \xrightarrow{p} 0$ en $\frac{1}{X_{n:n}} \xrightarrow{p} 0$.
- Wat is de limietverdeling van $Y_n := \sqrt{n}X_{1:n}$?
- Waarheen convergeert $Z_n := \sqrt{n}(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - 1)$ in verdeling? (Hint: hoe is X^2 verdeeld?)

4. Beschouw een steekproef X_1, \dots, X_n uit $\text{UNIF}(0, 1)$.

- Hoe is $S := -\sum_{i=1}^n \log X_i$ verdeeld?
- Bepaal pdf van $W := X_1/X_2$ (NB: let op de dragers).

Succes!!!