

### Tentamen Kres 3, 260106, 14.00–17.00

*Motiveer uw antwoorden, antwoorden zonder motivatie worden niet goed gerekend. Denk aan de dragers. Ieder onderdeel is 10 punten waard. Bij het tentamen mag alleen gebruik worden gemaakt van een (zelf mee te nemen) onbeschreven kopie van Appendix B van Bain en Engelhardt.*

1. Gegeven is de volgende joint pdf

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = \begin{cases} cxe^{x+y-3z}, & 0 < x < y < z < \infty \\ \text{elders.} & \end{cases}$$

- Bepaal  $c$  en de marginale pdf  $f_X(x)$ .
- Bereken de voorwaardelijke verwachting  $E(Y|X = x)$ .
- Leid de joint pdf  $f_{V,W}(v, w)$  van  $(V, W)$  af, waarbij  $V = Y - X$  en  $W = Z - Y$ . Zijn  $V$  en  $W$  s.o.?

2. Stel  $X$  en  $Y$  zijn s.o. en beide  $\text{EXP}(\theta)$  verdeeld.

- Bereken de MGF van  $U := X + Y$  en die van  $V := X - Y$ . Welke verdelingen hebben  $U$  en  $V$  respectievelijk?
- Toon aan dat  $\frac{U}{V}$  en  $U$  stochastisch onafhankelijk zijn.

3. Laat  $X_1, \dots, X_n$  s.o. zijn met pdf

$$f_X(x) = \frac{2}{\theta} \left(1 - \frac{x}{\theta}\right), \quad \text{voor } 0 < x < \theta, \text{ met } \theta > 0.$$

- Bewijs dat  $X_{1:n} \xrightarrow{p} 0$  en  $X_{n:n} \xrightarrow{p} \theta$ .
- Heeft  $Y_n := \sqrt{n}(\theta - X_{n:n})$  een limietverdeling, en zo ja, welke?
- Bepaal de limietverdeling van

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \frac{1}{3}\theta}{X_{n:n} \sqrt{\frac{1}{18}}}.$$

4. Beschouw een steekproef  $X_1, \dots, X_n$  uit  $N(0, \sigma^2)$ .

- Geef aan hoe men de onderstaande kans met behulp van een tabel van de F-verdeling kan bepalen:

$$P \left[ \frac{X_1^2 + X_2^2}{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2} \leq a \right], \quad 0 < a < 1.$$

- Bepaal de verdelingen van de volgende stochasten voor  $n \geq 3$ :

$$i) \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad ii) \frac{n(\bar{X})^2}{\sigma^2}, \quad iii) \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{\sigma^2}, \quad iv) \frac{X_1^2 + X_2^2}{2X_3^2}, \quad v) \frac{X_1}{\sigma \sqrt{\frac{X_2^2}{\sigma^2}}} = \frac{X_1}{|X_2|}.$$

**Succes!!!**