Uitwerkingen tentamen Kres 3, 220606

1. (a) $f_X(x) = c(1-x)\int_0^\infty e^{-y/x}dy = cx(1-x)$, $0 < x < 1$. Uit vergelijking met tabel B volgt dat deze functie van x op een onbekende factor na precies een BETA(2,2) pdf is, dus de onbekende factor is $c = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(2)^2} = 6$.

   (b)
$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{6(1-x)e^{-y/x}}{6x(1-x)} = \frac{1}{x}e^{-y/x}, \quad x > 0$$
   Dus $Y|X = x \sim \text{EXP}(x)$, en daaruit volgt $E[Y|X = x] = x$. Covariantie:
$$E[XY] = E[XE[Y|X]] = E[X^2] = \text{Var}(X) + (E[X])^2.$$
   Verder $E[X] = \frac{1}{2}$ en $E[Y] = E[E[Y|X]] = E[X] = \frac{1}{2}$, dus
$$\text{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \text{Var}(X) = \frac{4}{80} = \frac{1}{20}.$$

   (c) $W = Y/X$, $V = X$. Inverteren geeft $X = V$, $Y = VW$,
$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ w & v \end{vmatrix} = v$$
$$f_{V,W}(v,w) = 6v(1-v)e^{-w}, \quad w > 0, 0 < v < 1$$
   De drager is een Cartesisch product en de pdf een product van een functie van V en van W, dus zijn $V = X$ en W s.o.

2. (a)
$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2-2\rho xy}{2(1-\rho^2)}}\,dy$$
   dus in het bijzonder
$$f_X(0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2(1-\rho^2)}}\,dy$$
   We hoeven deze integraal niet uit te rekenen, immers het zou gewoon een constante opleveren
$$f_{Y|X=0}(y|x=0) = \frac{f_{X,Y}(x,0)}{f_X(0)} = k \times e^{-\frac{y^2}{2(1-\rho^2)}}$$
   en dit is een normale pdf als $k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}$

(b)

$$\begin{aligned} M_{V,W}(s,t) &= E\left[e^{sV+tW}\right] = E\left[e^{s(X+Y)+t(X-Y)}\right] \\ &= E\left[e^{(s+t)X+(s-t)Y}\right] = M_{X,Y}(s+t,s-t) \\ &= e^{\frac{1}{2}(s+t)^2+\frac{1}{2}(s-t)^2+\rho(s^2-t^2)} \\ &= e^{s^2+t^2+\rho(s^2-t^2)} \\ &= e^{(1+\rho)s^2+(1-\rho)t^2} \end{aligned}$$

Dit is een product van een functie van s en van t voor alle $\rho \in (-1,1)$, dus voor al deze waarden van ρ zijn V en W s.o.

3. De CDf hebben we later nodig: $F_X(x) = \int_0^x f_X(s)\,ds = 1 - e^{-x^2}$, $x > 0$ en 0 elders

(a)

$$\begin{aligned} P[|X_{1:n} - 0| \le \varepsilon] &= P[X_{1:n} \le \varepsilon] = 1 - P[X_{1:n} > \varepsilon] \\ &= 1 - (P[X > \varepsilon])^n = 1 - (1 - F_X(\varepsilon))^n = 1 - e^{-n\varepsilon^2} \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} 1, \qquad \forall \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P[|X_{n:n}^{-1} - 0| \le \varepsilon] &= P[X_{n:n}^{-1} \ge \varepsilon] = 1 - P[X_{n:n} \le \varepsilon^{-1}] \\ &= 1 - (F_X(\varepsilon^{-1}))^n = 1 - (1 - e^{-1/\varepsilon^2})^n \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} 1, \qquad \forall \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

(b) $Y_n := \sqrt{n}X_{1:n}$

$$\begin{aligned} G_n(y) &= P[\sqrt{n}X_{1:n} \le y] = P[X_{1:n} \le \tfrac{y}{\sqrt{n}}] = 1 - P[X_{1:n} > \tfrac{y}{\sqrt{n}}] \\ &= 1 - (1 - F_X(y/\sqrt{n}))^n = 1 - (e^{-(y/\sqrt{n})^2})^n = 1 - e^{-y^2}, \quad y > 0 \end{aligned}$$

(c) $Y = X^2$, inverse $X = \sqrt{Y}$, $J = 1/(2\sqrt{y})$. $f_Y(y) = \frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}e^{-y} = e^{-y}$, $y > 0$, dus $Y \sim \mathrm{EXP}(1)$. De CLS geeft nu

$$\sqrt{n}\frac{(\sum_{i=1}^n X_i^2 - 1)}{1} = \sqrt{n}\frac{(\sum_{i=1}^n Y_i - 1)}{1} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

4. (a) Transformeren: $Y = -\log X$, inverse $X = e^{-Y}$, $J = e^{-y}$, $f_Y(y) = e^{-y}$, $y > 0$ dus $Y \sim \mathrm{EXP}(1)$, ofwel $Y \sim \mathrm{GAM}(1,1)$. Wegens het feit dat de Y_i s.o. zijn, geldt dan $\sum_{i=1}^n Y_i \sim \mathrm{GAM}(1,n)$.

(b) $V = X_1$, $W = X_1/X_2$. Inverteren: $X_1 = V$, $X_2 = V/W$.

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ w^{-1} & -v/w^2 \end{vmatrix} = -v/w^2$$

$f_{V,W}(v,w) = \frac{v}{w^2}$, voor $0 < v < 1$, $w > v$.