Uitwerkingen tentamen Kres 3, 260106

1. (a) $f_{X,Y}(x,y) = cxe^{x+y}\int_y^\infty e^{-3z}dz = cxe^{x+y}\left[-\frac{1}{3}e^{-3z}\right]_{z=y}^\infty = \frac{1}{3}cxe^{x-2y}$, $0 < x < y$. $f_X(x) = \frac{1}{3}cxe^x\int_x^\infty e^{-2y}dy = \frac{1}{6}cxe^x\left[-\frac{1}{2}e^{-2y}\right]_{y=x}^\infty = \frac{1}{6}cxe^{-x}$, $x > 0$. Dit is juist een $\mathrm{GAM}(1,2)$ pdf voor $c = 6$.

   (b) $f_{Y|X}(y|x) = \frac{2xe^{x-2y}}{xe^{-x}}$, $y > x > 0$,

$$\begin{aligned} E[Y|X=x] &= 2\int_x^\infty ye^{2(x-y)}dy \\ &\overset{s=y-x}{=} 2\int_0^\infty (x+s)e^{-2s}ds \\ &= x + E[S] \quad \text{voor een stochast } S \sim \mathrm{EXP}(\tfrac{1}{2}) \\ &= x + \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

   (c) Laat $S = X$, $V = Y - X$, $W = Z - Y$, dan is de inverse gegeven door $X = S$, $Y = S + V$, $Z = S + V + W$. De Jacobiaan is $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en heeft determinant 1.
   $f_{S,V,W}(s,v,w) = 6se^{s+s+v-3w-3s-3v} = 6se^{-s-2v-3w}$, $s, v, w > 0$.
   $f_{V,W}(v,w) = \int_0^\infty 6se^{-s-2v-3w}ds = 6e^{-2v-3w}$, $v, w > 0$, dit factoriseert en de drager is een Carth. product dus V, W zijn s.o. (of: de joint pdf is het product van de twee marginale pdf's).

2. (a) Tabel $\Rightarrow M_X(t) = M_Y(t) = \frac{1}{1-\theta t}$.
   $M_U(t) = E\left[e^{tU}\right] = E\left[e^{tX+tY}\right] = M_X(t)M_Y(t) = \left(\frac{1}{1-\theta t}\right)^2$, dus $U = X + Y \sim \mathrm{GAM}(\theta, 2)$. $M_V(t) = E\left[e^{tV}\right] = E\left[e^{tX-tY}\right] = M_X(t)M_Y(-t) = \frac{1}{1-\theta t}\frac{1}{1+\theta t} = \frac{1}{1-\theta^2t^2}$, dus $V = X - Y \sim \mathrm{DE}(\theta, 0)$.

   (b) Laat $S = U/V$, $T = U$, in termen van X, Y: $S = \frac{X-Y}{X+Y}$, $T = X + Y$. De inverse is $X = \frac{1}{2}(1+S)T$, $Y = \frac{1}{2}(1-S)T$, met jacobiaan $J = \begin{pmatrix} \frac{1+s}{2} & \frac{t}{2} \\ \frac{1-s}{2} & \frac{-t}{2} \end{pmatrix}$ met determinant $\det J = -\frac{t}{2}$.
   $f_{S,T}(s,t) = \frac{t}{2\theta^2}e^{-\frac{(1+s)t}{2\theta}-\frac{(1-s)t}{2\theta}} = \frac{t}{2\theta^2}e^{-t/\theta}$, $-1 < s < 1$, $t > 0$. Dit factoriseert in het produkt van een functie van s en van t en de drager is een Carthetisch produkt $\Rightarrow S$ en T zijn s.o.

3. We berekenen alvast de CDF van X: $F_X(x) = \int_0^x f_X(s)ds = \int_0^x \frac{2}{\theta}\left(1 - \frac{s}{\theta}\right)ds = \left[\frac{2s}{\theta} - \frac{s^2}{\theta^2}\right]_{s=0}^x = \frac{x}{\theta}\left(2 - \frac{x}{\theta}\right)$, voor $0 < x < \theta$.

   (a)

$$\begin{aligned} P[|X_{1:n} - 0| \le \varepsilon] &= P[X_{1:n} \le \varepsilon] = 1 - P[X_{1:n} > \varepsilon] \\ &= 1 - (1 - F_X(\varepsilon))^n = 1 - (1 - \tfrac{\varepsilon}{\theta}(2 - \tfrac{\varepsilon}{\theta}))^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

voor $0 < \varepsilon < \theta$.

$$\begin{aligned} P[|X_{n:n} - \theta| \le \varepsilon] &= P[\theta - X_{n:n} \le \varepsilon] = P[X_{n:n} \ge \theta - \varepsilon] = 1 - P[X_{n:n} < \theta - \varepsilon] \\ &= 1 - (F_X(\theta - \varepsilon))^n \\ &= 1 - (\tfrac{\theta-\varepsilon}{\theta}(2 - \tfrac{\theta-\varepsilon}{\theta}))^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

voor $0 < \varepsilon < \theta$.

(b) Heeft $Y_n := \sqrt{n}\,(\theta - X_{n:n})$ een limietverdeling, en zo ja, welke?

$$\begin{aligned} P[Y_n \le y] &= P[\sqrt{n}(\theta - X_{n:n}) \le y] = P[X_{n:n} \ge \theta - \tfrac{y}{\sqrt{n}}] \\ &= 1 - P[X_{n:n} < \theta - \tfrac{y}{\sqrt{n}}] = 1 - \left(F_X(\theta - \tfrac{y}{\sqrt{n}})\right)^n \\ &= 1 - \left(\tfrac{\theta - \frac{y}{\sqrt{n}}}{\theta}\left(2 - \tfrac{\theta - \frac{y}{\sqrt{n}}}{\theta}\right)\right)^n \\ &= 1 - \left(1 - \tfrac{y}{\theta\sqrt{n}}\right)^n \left(1 + \tfrac{y}{\theta\sqrt{n}}\right)^n \\ &= 1 - \left(1 - \tfrac{y^2}{\theta^2 n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - e^{-y^2/\theta^2}, \quad y > 0 \end{aligned}$$

Dus de limietverdeling bestaat.

(c) Uit onderdeel a) weten we dat $X_{n:n} \xrightarrow{p} \theta$. Volgens de stelling van Slutsky hebben $V := \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \frac{1}{3}\theta}{X_{n:n}\sqrt{\frac{1}{18}}}$. en $W := \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \frac{1}{3}\theta}{\theta\sqrt{\frac{1}{18}}}$ dan dezelfde limietverdeling. De limietverdeling van W volgt uit de CLS:

$E[X] = \int_0^\theta \frac{2x}{\theta}\left(1 - \frac{x}{\theta}\right)dx = \left[\frac{x^2}{\theta} - \frac{2}{3}\frac{x^3}{\theta^2}\right]_{x=0}^{\theta} = \frac{1}{3}\theta$.

$E[X^2] = \int_0^\theta \frac{2x^2}{\theta}\left(1 - \frac{x}{\theta}\right)dx = \left[\frac{2}{3}\frac{x^3}{\theta} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{\theta^2}\right]_{x=0}^{\theta} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)\theta^2 = \frac{1}{6}\theta^2$, zodat $\mathrm{Var}X = E[X^2] - (E[X])^2 = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9}\right)\theta^2 = \frac{1}{18}\theta^2$.

Hieruit volgt dat $W \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$, en dus ook $V \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$.

4. (a) Laat $Z_i := X_i/\sigma \sim N(0,1)$ zodat $Z_i^2 \sim \chi^2(1)$.

$$\begin{aligned} P\left[\frac{X_1^2+X_2^2}{X_1^2+X_2^2+X_3^2} \le a\right] &= P\left[\frac{X_1^2+X_2^2+X_3^2}{X_1^2+X_2^2} \ge \frac{1}{a}\right] = P\left[1 + \frac{X_3^2}{X_1^2+X_2^2} \ge \frac{1}{a}\right] \\ &= P\left[\frac{Z_3^2}{Z_1^2+Z_2^2} \ge \frac{1}{a} - 1\right] = P\left[\frac{Z_3^2/1}{(Z_1^2+Z_2^2)/2} \ge \frac{2}{a} - 2\right] \\ &= P\left[F(1,2) \ge \frac{2(1-a)}{a}\right]. \end{aligned}$$

Deze laatste kans is in de tabel van de F-verdeling op te zoeken.

(b) *i*) $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \sim N(0, \frac{\sigma^2}{n})$

ii) $\sqrt{n}\frac{\bar{X}}{\sigma} \sim N(0,1)$, dus $\frac{n\left(\bar{X}\right)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$

iii) $\frac{X_i}{\sigma} \sim N(0,1)$ en s.o. zodat $\frac{X_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$ en s.o., dus $\sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$

iv) Omdat $\frac{X_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$ en s.o. volgt $\frac{X_1^2+X_2^2}{2X_3^2} \sim F(2,1)$

v) Volgens stelling 8.4.1 die ook de definitie van de T-verdeling bevat: $\frac{X_1}{\sigma\sqrt{\frac{X_2^2}{\sigma^2}}} \sim t(1)$.