

## Tentamen KReS 3, 16 januari 2009, 09.00–12.00

*Motiveer uw antwoorden, antwoorden zonder motivatie worden niet goed gerekend. Denk aan de dragers. Ieder onderdeel is 10 punten waard. Bij het tentamen mag alleen gebruik worden gemaakt van een (zelf mee te nemen) onbeschreven kopie van Appendix B van Bain en Engelhardt.*

1. De simultane pdf van  $(X, Y, Z)$  wordt gegeven door

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = 6, \quad 0 < x < y < z < 1$$

- (a) Bepaal de marginale pdf's van  $X$ ,  $Y$  en  $Z$ .
- (b) Bereken de voorwaardelijke verwachting  $E(Y|X = x, Z = z)$ .
- (c) Beschouw de simultane transformatie  $U = X$ ,  $V = X/Y$  en  $W = Y/Z$ . Zijn  $U$ ,  $V$  en  $W$  s.o.?

2. Gegeven is:  $X_1$  en  $X_2$  zijn s.o. en identiek verdeeld. De MGF is  $M_X(t) = (1-2t)^{-1}$ .

- (a) Beschouw de simultane transformatie  $V = X_1 + X_2$ ,  $W = X_1 - X_2$ . Bepaal de joint MGF van  $(V, W)$ . Zijn  $V$  en  $W$  s.o.?
- (b) Welke bekende verdeling volgen  $V$ , resp.  $W$ ?

3. Gegeven:  $X_1, \dots, X_n$  vormen een steekproef uit de verdeling met pdf

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) Toon aan dat  $X_{1:n} \xrightarrow{p} 0$  en  $X_{n:n} \xrightarrow{p} 1$ .
- (b) Heeft  $\sqrt{n}X_{1:n}$  een limietverdeling? Zo ja, welke?
- (c) Bepaal de limietverdeling van

$$W_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \frac{2}{3}}{X_{n:n} \sqrt{\frac{1}{18}}}.$$

4. Stel,  $X_1, \dots, X_n$  ( $n \geq 3$ ) zijn s.o. en  $\text{EXP}(\theta^{-1})$  verdeeld (het betreft dus een steekproef uit de kansdichtheid  $f_X(x) = \theta e^{-\theta x}$ ,  $x > 0$ ).

- (a) Bereken  $E(e^{-S})$ , waarbij  $S = \sum_{i=1}^n X_i$ .
- (b) Bepaal de gezamenlijke pdf van  $(V, W, Z)$  met  $V = 1/(X_1 + X_2)$ ,  $W = 1/(X_2 + X_3)$  en  $Z = X_2$ . Zijn  $V$ ,  $W$  en  $Z$  s.o.?

**Succes!!!**

## Oplossingen

1. De simultane pdf van  $(X, Y, Z)$  wordt gegeven door

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = 6, \quad 0 < x < y < z < 1$$

(a) Bepaal de marginale pdf's van  $X$ ,  $Y$  en  $Z$ .

$$f_{X,Y}(x, y) = \int_y^1 6dz = 6(1 - y), \quad 0 < x < y < 1.$$

$$f_X(x) = \int_x^1 f_{X,Y}(x, y)dy = [-3(1 - y)^2]_{y=x}^1 = 3(1 - x)^2, \quad 0 < x < 1.$$

$$f_Y(y) = \int_0^y f_{X,Y}(x, y)dx = 6y(1 - y), \quad 0 < y < 1.$$

$$f_{Y,Z}(y, z) = \int_0^y 6dx = 6y, \quad 0 < y < z < 1.$$

$$f_Z(z) = \int_0^z f_{Y,Z}(y, z)dy = [3y^2]_{y=0}^z = 3z^2, \quad 0 < z < 1.$$

(b) Bereken de voorwaardelijke verwachting  $E(Y|X = x, Z = z)$ .

$$f_{X,Z}(x, z) = \int_x^z 6dy = [6y]_{y=x}^z = 6(z - x), \quad 0 < x < z < 1$$

zodat

$$f_{Y|X, Z}(y|x, z) = \frac{6}{6(z - x)} = \frac{1}{z - x}, \quad x < y < z.$$

We vinden dus  $Y|x, z \sim \text{UNIF}(x, z)$ , waaruit blijkt dat de voorwaardelijke verwachting die van een  $\text{UNIF}(x, z)$ -verdeling is:  $E(Y|x, z) = (x + z)/2$ .

(c) Beschouw de simultane transformatie  $U = X$ ,  $V = X/Y$  en  $W = Y/Z$ . Zijn  $U$ ,  $V$  en  $W$  s.o.?

De inverse transformatie wordt gegeven door  $X = U$ ,  $Y = U/V$ ,  $Z = U/(VW)$ . De jacobiaan is

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} & 0 \\ \frac{1}{vw} & -\frac{u}{vw^2} & -\frac{u}{vw^2} \end{pmatrix}$$

De determinant is  $\det J = \frac{u^2}{v^3w^2}$ , waarmee de pdf wordt

$$f_{U,V,W}(u, v, w) = \frac{6u^2}{v^3w^2}, \quad 0 < u < \frac{u}{v} < \frac{u}{vw} < 1$$

De pdf factoriseert dus, maar de drager is geen Cartesisch product. Immers, de drager van  $u$ ,  $v$  resp.  $w$  is het interval  $[0, 1]$ , maar we vinden dat  $u < vw$  moet zijn, dus voor gegeven  $v$  en  $w$  mogen niet alle  $u$ -waarden op  $[0, 1]$  meer voorkomen.

2. Gegeven is:  $X_1$  en  $X_2$  zijn s.o. en identiek verdeeld. De MGF is  $M_X(t) = (1-2t)^{-1}$ .

- (a) Beschouw de simultane transformatie  $V = X_1 + X_2$ ,  $W = X_1 - X_2$ . Bepaal de joint MGF van  $(V, W)$ . Zijn  $V$  en  $W$  s.o.?

$$\begin{aligned} M_{V,W}(s, t) &= E \left( e^{(X+Y)s+(X-Y)t} \right) \\ &= E \left( e^{X(s+t)+Y(s-t)} \right) \\ &= \frac{1}{1-2t-2s} \frac{1}{1-2s+2t} \\ &= \frac{1}{(1-2s)^2-4t^2}. \end{aligned}$$

Dit factoriseert niet, dus zijn  $V$  en  $W$  niet s.o.

- (b) De MGF van  $V$  is

$$M_V(s) = M_{V,W}(s, 0) = \left( \frac{1}{1-2s} \right)^2,$$

dus de MGF van de GAM(2, 2)-verdeling. Verder,

$$M_W(t) = M_{V,W}(0, t) = \frac{1}{1-4t^2},$$

de MGF van een DE(2,0)-verdeelde stochast.

3. Gegeven:  $X_1, \dots, X_n$  vormen een steekproef uit de verdeling met pdf

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) Toon aan dat  $X_{1:n} \xrightarrow{p} 0$  en  $X_{n:n} \xrightarrow{p} 1$ .

Straks hebben we de CDF nodig:  $F_X(x) = \int_0^x 2s ds = x^2$  voor  $0 < x < 1$ .

$$\begin{aligned} P(|X_{1:n} - 0| \leq \varepsilon) &= P(X_{1:n} \leq \varepsilon) \\ &= 1 - P(X_{1:n} > \varepsilon) \\ &= 1 - (1 - F_X(\varepsilon))^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \end{aligned}$$

En

$$\begin{aligned} P(|X_{n:n} - 1| \leq \varepsilon) &= P(1 - X_{n:n} \leq \varepsilon) \\ &= P(X_{n:n} > 1 - \varepsilon) \\ &= 1 - (F_X(\varepsilon))^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \end{aligned}$$

- (b) Heeft  $\sqrt{n}X_{1:n}$  een limietverdeling? Zo ja, welke?

Laat  $Y_n = \sqrt{n}X_{1:n}$ . De CDF van  $Y_n$  is

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(y) &= P(Y_n \leq y) \\ &= P(\sqrt{n}X_{1:n} \leq y) \\ &= P(X_{1:n} \leq y/\sqrt{n}) \\ &= 1 - P(X_{1:n} > y/\sqrt{n}) \\ &= 1 - (1 - F_X(y/\sqrt{n}))^n \\ &= 1 - \left(1 - \frac{y^2}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - e^{-y^2}. \end{aligned}$$

De dichtheid van de limietverdeling is  $2ye^{-y^2}$  (de WEI(1,2) verdeling).

(c) Bepaal de limietverdeling van

$$W_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \frac{2}{3}}{X_{n:n} \sqrt{\frac{1}{18}}}.$$

$E(X) = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}$  en  $E(X^2) = \int_0^1 2x^3 = \frac{1}{2}$ , dus  $\text{Var}(X) = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$ . Volgens de CLS geldt

$$V_n = \sqrt{n} \frac{(\bar{X} - \frac{2}{3})}{\sqrt{\frac{1}{18}}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1).$$

Omdat  $W_n = V_n/X_{n:n}$  en  $X_{n:n} \xrightarrow{p} 1$ , hebben  $V_n$  en  $W_n$  dezelfde limietverdeling (Slutsky).

4. Gegeven:  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n \geq 3$  vormen een steekproef uit de  $\text{EXP}(\theta^{-1})$ -verdeling.

(a) Bereken  $E(e^{-S})$ , waarbij  $S = \sum_{i=1}^n X_i$ .

We weten dat  $S = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{GAM}(\theta^{-1}, n)$ . De gevraagde verwachting is

$$\begin{aligned} E(e^{-S}) &= \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty s^{n-1} e^{-(\theta+1)s} ds \\ &= \frac{\theta^n}{(\theta+1)^n} \int_0^\infty \frac{(\theta+1)^n}{\Gamma(n)} s^{n-1} e^{-(\theta+1)s} ds \\ &= \frac{\theta^n}{(\theta+1)^n}, \end{aligned}$$

omdat de laatste integraal net de integraal over een  $\text{EXP}((\theta+1)^{-1})$ -pdf is (en dus gelijk aan 1). Andere aanpak:

$$E(e^{-S}) = M_S(-1) = (M_X(-1))^n = \left( \frac{1}{1+\theta^{-1}} \right)^n = \left( \frac{\theta}{\theta+1} \right)^n$$

(b) Stel,  $X_1, \dots, X_n$  ( $n \geq 3$ ) zijn s.o. en  $\text{EXP}(\theta^{-1})$  verdeeld (het betreft dus een steekproef uit de kansdichtheid  $f_X(x) = \theta e^{-\theta x}$ ,  $x > 0$ ).

De inverse is  $X_1 = \frac{1}{V} - Z$ ,  $X_2 = Z$  en  $X_3 = \frac{1}{W} - Z$ . De determinant van de Jacobiaan is

$$|J| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{v^2} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{w^2} & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{v^2 w^2}.$$

De joint pdf is

$$f_{V,W,Z}(v, w, z) = \frac{1}{v^2 w^2} \theta^3 e^{-\theta(-z + \frac{1}{v} + \frac{1}{w})} = \frac{1}{v^2 w^2} \theta^3 e^{-\theta(-z - \theta \frac{1}{v} - \theta \frac{1}{w})}.$$

De pdf factoriseert dus, maar hoe zit het met de drager. Het is eenvoudig na te gaan dat voor een gegeven waarde van  $Z$ , dus gegeven  $Z = z$ , de mogelijke waarden van  $V = 1/(z + X_1)$  van 0 tot  $1/z$  lopen (idem voor de mogelijke waarden van  $W$ ). Omdat de mogelijke  $V$ - en  $W$ -waarden van  $Z$  afhangen, is de drager geen Cartesisch product, en zijn  $V$ ,  $W$  en  $Z$  dus niet s.o.