

Tentamen Kres 3, 021106, 09.30–12.30

Motiveer uw antwoorden, antwoorden zonder motivatie worden niet goed gerekend. Denk aan de dragers. Ieder onderdeel is 10 punten waard. Bij het tentamen mag alleen gebruik worden gemaakt van een (zelf mee te nemen) onbeschreven kopie van Appendix B van Bain en Engelhardt.

1. Gegeven is de volgende joint pdf

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = \begin{cases} ce^{-z}, & 0 < x < y < z < \infty \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

- Bepaal c en de marginale pdf $f_Y(y)$ van Y .
- Bereken $\text{Cov}(X, Y)$.
- Laat $V = Y - X$ en $W = Z - Y$. Bereken de joint pdf $f_{V,W}(v, w)$ van V en W . Zijn V en W s.o.?

2. Stel X_1 en X_2 zijn s.o. en beide standaard normaal (dus $N(0, 1)$) verdeeld.

- Bereken de joint MGF $M_{Y_1, Y_2}(t_1, t_2)$ van $Y_1 := X_1 - aX_2$ en $Y_2 := X_1 + X_2$. Voor welke waarde(n) van a zijn Y_1 en Y_2 s.o.?
- Geef aan hoe de onderstaande kans bepaald kan worden met behulp van een tabel van de F-verdeling:

$$P \left[\frac{X_1^2 - X_2^2}{X_1^2 + X_2^2} \leq \frac{1}{2} \right].$$

3. Zij X_1, \dots, X_n een steekproef uit de verdeling met pdf

$$f_X(x) = 2x, \quad 0 < x < 1.$$

- Bepaal de limietverdeling van $Y_n = \sqrt{n}X_{1:n}/X_{n:n}$.
- Heeft $\sqrt{n} \left(\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - 1 \right)$ een limietverdeling? Zo ja welke?
- Leid voor $n = 3$ de pdf van de steekproefmediaan $X_{2:n}$ af.

4. Gegeven: X_1, X_2 en X_3 zijn s.o. en $\text{GAM}(\theta, 2)$ verdeeld.

- Welke verdeling volgt $U = X_1 + X_2 + X_3$? En $V = \frac{2X_1}{X_2 + X_3}$?
- Bepaal de joint pdf van $S = X_1 + X_2$ en $T = \frac{X_2}{X_1 + X_2}$. Zijn S en T s.o.?

Succes!!!