Uitwerkingen tentamen Kres 3, 021106

1. Gegeven is de volgende joint pdf

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = \begin{cases} ce^{-z}, & 0 < x < y < z < \infty \\ & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) Bepaal c en de marginale pdf $f_Y(y)$ van Y.

$$f_{X,Y}(x,y) = c\int_y^\infty e^{-z}\,dz = -ce^{-z}\Big|_{z=-y}^{\infty} = ce^{-y}, \quad y > x > 0$$

$$f_Y(y) = c\int_0^y e^{-y}\,dx = cye^{-y}, \quad y > 0$$

Dit is de pdf van een GAM$(1,2)$ stochast als $c = 1$.

(b) Bereken $\mathrm{Cov}(X,Y)$. Via $E[X|Y]$:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{e^{-y}}{ye^{-y}} = \frac{1}{y}, \quad 0 < x < y$$

$$E[X|Y=y] = \int_0^y \frac{x}{y}\,dx = \frac{1}{y}\,\frac{1}{2}x^2\Big|_{x=0}^{y} = \frac{1}{2}y.$$

zodat $E[XY] = E[YE[X|Y]] = E[\frac{1}{2}Y^2] = \frac{1}{2}(\mathrm{Var(y)} + (E[Y])^2) = \frac{1}{2}(2+4) = 3$. Verder, $E[X] = E[E[X|Y]] = E[\frac{1}{2}Y] = 1$ en $E[Y] = 2$. Dus $\mathrm{Cov}(X,Y) = 3 - 1\cdot 2 = 1$.

Alternatief, via $E[Y|X]$:

$$f_X(x) = \int_x^\infty e^{-y}\,dy = e^{-x}, \quad x > 0$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{e^{-y}}{e^{-x}} = e^{x-y}, \quad y > x$$

$$E[Y|X=x] = \int_x^\infty ye^{x-y}\,dy = -\,e^x(1+y)e^{-y}\Big|_{y=x}^{\infty} = 1 + x.$$

Dus $E[XY] = E[XE[Y|X]] = E[X(X+1)] = E[X^2] + E[X] = \mathrm{Var}(X) + (E[X])^2 + E[X] = 1+1+1 = 3$. $E[X] = 1$, $E[Y] = E[E[Y|X]] = E[X+1] = 2$, dus Dus $\mathrm{Cov}(X,Y) = 3 - 1\cdot 2 = 1$.

(c) Laat $V = Y - X$ en $W = Z - Y$. Bereken de joint pdf $f_{V,W}(v,w)$ van (V,W). Zijn V en W s.o?

Bekijk de transformatie $U = X$, $V = Y - X$, $W = Z - Y$. Inverse: $X = U$, $Y = U + V$, $Z = U + V + W$.

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Dus

$$f_{U,V,W}(u,v,w) = e^{-u-v-w}, \quad u,v,w > 0$$

De pdf factoriseert en de drager is een Cartesisch product, dus U, V en W zijn s.o.

2. Stel X_1 en X_2 zijn s.o. en beide standaard normaal (dus $N(0,1)$) verdeeld.

   (a) Bereken de joint MGF $M_{Y_1,Y_2}(t_1,t_2)$ van $Y_1 := X_1 - aX_2$ en $Y_2 := X_1 + X_2$. Voor welke waarde(n) van a zijn Y_1 en Y_2 s.o?

   Uit de tabel: $M_X(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$. De definitie van de joint MGF toepassenen uitwerken levert

$$\begin{aligned}
M_{Y_1,Y_2}(t_1,t_2) &= E\left[e^{t_1Y_1+t_2Y_2}\right] \\
&= E\left[e^{t_1(X_1-aX_2)+t_2(X_1+X_2)}\right] \\
&= E\left[e^{(t_1+t_2)X_1+(t_2-at_1)X_2}\right] \\
&\overset{\text{s.o.}}{=} M_X(t_1+t_2)M_X(t_2-at_1) \\
&= \exp[\tfrac{1}{2}(t_1+t_2)^2 + \tfrac{1}{2}(t_2-at_1)^2] \\
&= \exp[\tfrac{1}{2}(1+a^2)t_1^2 + (1-a)t_1t_2 + t_2^2]
\end{aligned}$$

   Y_1 en y_2 zijn s.o. als de joint MGF factoriseert in een product van een functie van t_1 en t_2, dus alleen voor $a = 1$.

   (b) Geef aan hoe de onderstaande kans bepaald kan worden met behulp van een tabel van de F-verdeling:

$$P\left[\frac{X_1^2 - X_2^2}{X_1^2 + X_2^2}\right].$$

$$\begin{aligned}
P\left[\frac{X_1^2-X_2^2}{X_1^2+X_2^2} \le \frac{1}{2}\right] &= P[X_1^2 - X_2^2 \le \tfrac{1}{2}X_1^2 + \tfrac{1}{2}X_2^2] \\
&= P[\tfrac{1}{2}X_1^2 \le 1\tfrac{1}{2}X_2^2] \\
&= P\left[\frac{X_1^2}{X_2^2} \le 3\right]
\end{aligned}$$

   Deze laatste kans is op te zoeken in een tabel van de F-verdeling, omdat $\frac{X_1^2}{X_2^2} \sim F(1,1)$.

3. CDF: $F_X(x) = \int_0^x 2s ds = x^2$ voor $0 < x < 1$.

   (a) We laten eerst zien dat $X_{n:n} \xrightarrow{p} 1$:

$$\begin{aligned}
P[|X_{n:n} - 1| < \varepsilon] &= P[1 - X_{n:n} < \varepsilon] = P[X_{n:n} > 1 - \varepsilon] \\
&= 1 - (F_X(1-\varepsilon))^n = 1 - (1-\varepsilon)^{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.
\end{aligned}$$

Volgens de stelling van Slutsky hebben $\sqrt{n}X_{1:n}/X_{n:n}$ en $Y_n := \sqrt{n}X_{1:n}$ dezelfde limietverdeling.

$$\begin{aligned} G_n(y) &:= F_{Y_n}(y) = P[\sqrt{n}X_{1:n} \leq y] = P[X_{1:n} \leq y/\sqrt{n}] \\ &= 1 - P[X_{1:n} > y/\sqrt{n}] = 1 - (1 - F_X(y/\sqrt{n}))^n \\ &= 1 - (1 - y^2/n)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - e^{-y^2}, \qquad \text{voor } y > 0 \end{aligned}$$

(b) Laat $Y := X^2$. $F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[X^2 < y] = P[X < \sqrt{y}] = y$, $0 < y < 1$, de CDF van een UNIF(0,1) stochast, dus $Y \sim$ UNIF(0.1). De CLS geeft

$$V := \sqrt{n}\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i - \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right)} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1),$$

zodat

$$\sqrt{n}\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - 1\right) = V/\sqrt{3} \xrightarrow{d} Z/\sqrt{3} \sim N(0, 1/3),$$

(c) $f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3) = 8x_1x_2x_3$, $0 < x_i < 1$, $f_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1,y_2,y_3) = 6f_{X_1,X_2,X_3}(y_1,y_2,y_3) = 48y_1y_2y_3$, $0 < y_1 \leq y_2 \leq y_3 < 1$.

$$\begin{aligned} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) &= \int_{y_2}^1 f_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1,y_2,y_3)dy_3 \\ &= 48y_1y_2\int_{y_2}^{y_1} y_3dy_3 = 24y_1y_2(1-y_2^2), \quad \text{voor } 0 < y_1 \leq y_2 < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{Y_2}(y_2) &= \int_0^{y_2} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)dy_1 \\ &= 24y_2(1-y_2^2)\int_0^{y_2} y_1dy_1 = 12y_2^3(1-y_2^2), \quad \text{voor } 0 < y_2 < 1 \end{aligned}$$

4. (a) $U = X_1 + X_2 + X_3 \sim \text{GAM}(\theta, 6)$ (som van 3 stochastisch onafhankelijke GAM$(\theta, 2)$ stochasten), dit mag men direct opschrijven of afleiden, b.v. via de MGF methode. Voor V werken we toe naar een uitdrukking in termen van $\frac{2X_i}{\theta} \sim \chi^2(4)$.

$$\begin{aligned} V &= \frac{2X_1}{X_2 + X_3} = \frac{4X_1/\theta}{2X_2/\theta + 2X_3/\theta} \\ &= \frac{\left(\frac{2X_1/\theta}{4}\right)}{\left(\frac{2X_2/\theta + 2X_3/\theta}{8}\right)} \sim F(4,8). \end{aligned}$$

(b) $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{\theta^4\Gamma(2)^2}x_1x_2e^{-(x_1+x_2)/\theta}$ voor $x_1,\ x_2 > 0$. De transformatie $S = X_1 + X_2$, $T = \frac{X_1}{X_1+X_2}$ heeft als inverse $X_1 = ST$, $X_2 = S(1-T)$, zodat

$J = \begin{vmatrix} t & s \\ 1-t & -s \end{vmatrix} = -s$, dus $|J| = s$. De joint pdf van S en T is dus

$$\begin{aligned} f_{S,T}(s,t) &= \frac{s}{\theta^4 \Gamma(2)^2} sts(1-t) e^{-(st+s(1-t))/\theta} \\ &= \frac{1}{\theta^4 \Gamma(2)^2} s^3 t(1-t) e^{-s/\theta}, \qquad \text{voor } s > 0,\ 0 < t < 1. \end{aligned}$$

De pdf factoriseert en de drager is een Cartesisch product, dus S en T zijn s.o.