

Tentamen Kres 3, 2 november 2007, 09.00–12.00

Motiveer uw antwoorden, antwoorden zonder motivatie worden niet goed gerekend. Denk aan de dragers. Ieder onderdeel is 10 punten waard. Bij het tentamen mag alleen gebruik worden gemaakt van een (zelf mee te nemen) onbeschreven kopie van Appendix B van Bain en Engelhardt.

1. De kansdichtheid van de stochastische vector (X, Y) wordt gegeven door

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x}, & \frac{1}{2}y^2 \leq x; \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) Toon aan dat Y normaal verdeeld is en bepaal de verwachting en de variantie van Y .
(b) Bepaal de marginale dichtheid van X en bereken daarmee de verwachting van \sqrt{X} .
(c) Beschouw de transformatie gegeven door $V = Y$, $W = X - \frac{1}{2}Y^2$. Geef de voorwaardelijke verwachting $E[W|V = v]$ en bepaal daarmee $E[X|Y = y]$.

2. Stel X en Y zijn s.o. en beide $\text{GEO}(\frac{1}{2})$ verdeeld.

- (a) Bepaal de kansverdeling van $Z = X + Y$.
(b) Stel $W = (X + Y)^2$. Wat zegt de ongelijkheid van Jensen over $E[W]$?

3. Veronderstel dat X_1, \dots, X_n onderling onafhankelijke stochastische veranderlijken zijn met dichtheid

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{als } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

Laat $X_{1:n}$ en $X_{n:n}$ het minimum, respectievelijk, het maximum zijn van X_1, \dots, X_n .

- (a) Laat zien dat $X_{n:n} \xrightarrow{p} 1$.
(b) Heeft $Y_n = X_{n:n} + n^{\frac{1}{3}}X_{1:n}$ een limietverdeling, en zo ja, welke?
(c) Bepaal constanten a_n en b_n zodat $a_n(X_{1:n} - b_n)/\cos X_{1:n}$ in verdeling convergeert naar een niet-ontaarde kansverdeling.

4. Beschouw een steekproef, X_1, \dots, X_n ($n \geq 3$), uit de $N(0, 1)$ -verdeling.

- (a) Geef van de volgende kansvariabelen aan welke bekende verdeling ze volgen. Motiveer uw antwoorden kort maar duidelijk.

$$(i) U = \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (ii) V = \frac{2X_1^2}{X_2^2 + X_3^2} \quad (iii) W = \sqrt{n}\bar{X}_n/S_n.$$

- (b) Bepaal de simultane pdf van (Y, Z) met $Y = X_1^2 + X_2^2$ en $Z = \frac{X_1^2}{X_1^2 + X_2^2}$. Zijn Y en Z s.o.?

Succes!!!