# Uitwerking Tentamen Kres 3, 2 november 2007

1. (a) De marginale pdf van $Y$ is

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{1}{2}y^2}^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-x}\right]_{x=\frac{1}{2}y^2}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

voor $-\infty < y < \infty$, dus $Y \sim N(0,1)$, zodat $E[Y] = 0$ en $\text{var}Y = 1$.

(b) De marginale pdf van $X$ is

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x} \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} \mathrm{d}y = \frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{2\pi}} e^{-x} = \frac{1}{\Gamma(1\frac{1}{2})} x^{\frac{1}{2}} e^{-x}, \qquad x > 0,$$

dus $X \sim \text{GAM}(1, 1\frac{1}{2})$.

$$E[\sqrt{X}] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}},$$

omdat $\int_0^{\infty} x e^{-x}\,\mathrm{d}x$ net de verwachting is van een EXP(1)-verdeelde stochast (dus 1).

(c) De inverse transformatie is $Y = V$, $X = W + \frac{1}{2}V^2$. De jacobiaan is

$$J = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \right| = 1,$$

dus

$$f_{V,W}(v,w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w-\frac{1}{2}v^2}, \qquad -\infty < v < \infty, w > 0.$$

Dit is een product van een functie van $v$ en een functie van $w$, en de drager is een Cartesisch product, dus zijn $V$ en $W$ s.o. Of: de marginale pdf van $V$ en $W$ bepalen ($N(0,1)$ en EXP(1), respectievelijk) en laten zien dat de joint pdf het product van de twee bijbehorende pdf's is. $E[W|V = v] = E[W] = 1$ (1e stap wegens het s.o. zijn van $V$ en $W$). Hieruit volgt dan $E[X|Y = y] = E[W|Y = y] + E[\frac{1}{2}Y^2|Y = y] = 1 + \frac{1}{2}y^2$.

2. Stel $X$ en $Y$ zijn s.o. en beide GEO($\frac{1}{2}$) verdeeld.

(a) We gebruiken de momentenmethode: gegeven is

$$M_X(t) = M_Y(t) = \frac{\frac{1}{2}e^t}{1 - \frac{1}{2}e^t}$$

$$M_{X+Y}(t) = E\left[e^{t(X+Y)}\right] \underset{\text{s.o.}}{=} E\left[e^{t(X)}\right] E\left[e^{t(Y)}\right] = M_X(t) M_Y(t) = \left(\frac{\frac{1}{2}e^t}{2 - e^t}\right)^2.$$

Vergelijken met Tabel B.1 toont aan dat dit de MGF is van een NB($2, \frac{1}{2}$)-verdeling, dus $X + Y \sim \text{NB}(2, \frac{1}{2})$.

(b) Laat $g(s) = s^2$. Omdat $g$ strict convex is, en $X+Y$ geen gedegenereerde verdeling heeft, geldt de stricte ongelijkheid

$$E[(X+Y)^2] = E[g(X+Y)] > g(E[X+Y]) = 4^2 = 16.$$

3. We bepalen eerst de CDF: $F_X(x) = P[X \leq x] = \int_0^x 3x^2 \, \mathrm{d}x = x^3$, althans, voor $0 < x < 1$ ($F_X(x) = 0$ voor $x \leq 0$ en 1 voor $x \geq 1$).

(a)

$$P[|X_{n:n} - 1| \leq \varepsilon] = P[X_{n:n} > 1-\varepsilon] = 1 - P[X_{n:n} \leq 1-\varepsilon] = 1 - (F_X(1-\varepsilon))^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

voor $0 < \varepsilon < 1$ (dus al helemaal voor $\varepsilon \geq 1$).

(b) Volgens stelling 7.7.4 (Slutsky), is de limietverdeling van $Y_n = X_{n:n} + n^{\frac{1}{3}} X_{1:n}$ gelijk aan die van $Z_n := 1 + n^{\frac{1}{3}} X_{1:n}$. We kunnen de limietverdeling van $Z_n$ uitrekenen:

$$\begin{aligned} G_n(z) &= P[Z_n \leq z] = P[1 + n^{\frac{1}{3}} X_{1:n} \leq z] = P[n^{\frac{1}{3}} X_{1:n} \leq z-1] \\ &= P[X_{1:n} \leq (z-1)n^{-\frac{1}{3}}] = 1 - P[X_{1:n} > (z-1)n^{-\frac{1}{3}}] \\ &= 1 - (1 - F_X((z-1)n^{-\frac{1}{3}}))^n \\ &= 1 - \left(1 - \frac{(z-1)^3}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - e^{-(z-1)^3}, \qquad z > 1. \end{aligned}$$

Men kan nagaan dat $Z_n - 1$ in verdeling naar een Weibull (WEI$(1,3)$) verdeling convergeert.

(c) Bepaal constanten $a_n$ en $b_n$ zodat $a_n(X_{1:n} - b_n)/\cos X_{1:n}$ in verdeling convergeert naar een niet-ontaarde kansverdeling. We laten eerst zien dat $X_{1:n} \xrightarrow{P} 0$:

$$\begin{aligned} P[|X_{1:n}| \leq \varepsilon] &= P[X_{1:n} \leq \varepsilon] = 1 - P[X_{1:n} > \varepsilon] = 1 - (1 - F_X(\varepsilon))^n \\ &= 1 - (1-\varepsilon^3)^n \underset{n\to\infty}{\to} 1, \end{aligned}$$

voor $0 < \varepsilon < 1$, dus voor willekeurig kleine $\varepsilon$. Volgens Stelling 7.7.2 geldt dat $\cos X_{1:n} \xrightarrow{P} \cos 0 = 1$. Volgens de stelling van Slutsky hebben $a_n(X_{1:n} - b_n)/\cos X_{1:n}$ en $a_n(X_{1:n} - b_n)$ dezelfde limietverdeling. Omdat $X_{1:n} \xrightarrow{P} 0$ kunnen we $b_n = 0$ nemen, en ons afvragen wanneer $W_n = a_n X_{1:n}$ een niet-gedegenereerde limietverdeling heeft.

$$\begin{aligned} G_n(w) &= P[W_n \leq w] = P[a_n X_{1:n} \leq w] = P[X_{1:n} \leq w/a_n] \\ &= 1 - (1 - F_X(w/a_n))^n = 1 - (1 - (w/a_n)^3)^n. \end{aligned}$$

Dit heeft een mooie limiet voor $a_n = n^{1/3}$, want dan geldt

$$G_n(w) = 1 - (1 - (w/n^{1/3})^3)^n \underset{n\to\infty}{\to} 1 - e^{-w^3}, \quad w > 0.$$

(dus een WEI$(1,3)$-verdeling).

4. Beschouw een steekproef, $X_1, \ldots, X_n$ ($n \geq 3$), uit de $N(0,1)$-verdeling.

(a) (i) $U = \sum_{i=1}^n X_i^2$. De $X_i^2$ zijn s.o. en $\chi^2(1)$ verdeeld, dus is de som $\chi^2(n)$ verdeeld.

(ii) $V = \frac{2X_1^2}{X_2^2+X_3^2}$ is een breuk van onafhankelijke $\chi^2(1)$ en $\chi^2(2)$ verdeelde stochasten, ieder door hun aantal vrijheidsgraden gedeeld, dus is de breuk $F(1,2)$-verdeeld.

(iii) $W = \sqrt{n}\bar{X}_n/S_n$. $\sqrt{n}\bar{X} \sim N(0,1)$ en $(n-1)S_n^2 \sim \chi^2(n-1)$, dus is de breuk $t(n-1)$ verdeeld (zie vergeleijking 8.4.6 in het boek).

(b) $X_1^2$ en $X_2^2$ zijn s.o. en $\chi^2(1)$ verdeeld. Bekijk de transformatie $Y = X_1^2 + X_2^2$, $Z = X_1^2/(X_1^2 + X_2^2)$ met inverse $X_1^2 = YZ$, $X_2^2 = Y - YZ$. De jacobiaan is

$$J = \left| \begin{pmatrix} z & y \\ 1-z & -y \end{pmatrix} \right| = -y,$$

dus $|J| = y$, en hiermee vinden we

$$\begin{aligned} f_{Y,Z}(y,z) &= y\frac{1}{2\left(\Gamma(\frac{1}{2})\right)^2}(yz)^{-\frac{1}{2}}(y-yz)^{-\frac{1}{2}}e^{-y/2} \\ &= \tfrac{1}{2\pi}z^{-\frac{1}{2}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}e^{-y/2}, \qquad 0 < z < 1, y > 0. \end{aligned}$$

Dit is het product van twee marginale pdf's

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}e^{-y/2}, \qquad y > 0 \qquad (Y \sim \mathrm{EXP}(1))$$

en

$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi}z^{-\frac{1}{2}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}, \qquad 0 < z < 1 \qquad (Z \sim \mathrm{BETA}(0.5, 0.5)).$$