

## Tentamen KReS 3, 31 oktober 2008, 09.00–12.00

*Motiveer uw antwoorden, antwoorden zonder motivatie worden niet goed gerekend. Denk aan de dragers. Ieder onderdeel is 10 punten waard. Bij het tentamen mag alleen gebruik worden gemaakt van een (zelf mee te nemen) onbeschreven kopie van Appendix B van Bain en Engelhardt.*

1. De simultane pdf van  $(X, Y, Z)$  wordt gegeven door

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = x^2 e^{-x(1+y+z)}, \quad x, y, z > 0$$

- (a) Bepaal de marginale pdf,  $f_Y(y)$  van  $Y$ .
- (b) Bereken de voorwaardelijke pdf van  $(Y, Z|X)$ ,  $f_{Y,Z|X}(y, z|x)$ .
- (c) Beschouw de simultane transformaties  $U = X$ ,  $V = XY$  en  $W = XZ$ . Zijn  $U$ ,  $V$  en  $W$  s.o.?

2. Laat  $V_1$  en  $V_2$  twee onafhankelijke  $N(0, 1)$  variabelen voorstellen.

- (a) Geef de simultane MGF  $M_{X,Y}(s, t)$ , voor  $X = V_1$  en  $Y = V_1 - V_2$ .
- (b) Welke bekende verdelingen volgen de volgende grootheden?
  - (i)  $X + Y$
  - (ii)  $V_1 / \sqrt{V_2^2}$
  - (iii)  $V_1^2 / V_2^2$

3. Gegeven is dat  $U_1, \dots, U_n$  s.o. zijn en UNIF(0, 1) verdeeld.

- (a) Geef een functie  $g(u)$ , zodat  $W_i \equiv g(U_i) \sim \text{WEI}(1, 3)$ .
- (b) Stel,  $n$  is oneven, dus  $n = 2k - 1$  voor zekere  $k$ , zodat  $U_{k:n}$  de steekproefmediaan van  $U_1, \dots, U_n$  is. Geef met behulp van de ongelijkheid van Jensen een afschatting van  $E(U_{k:n}^2)$ .
- (c) Bepaal de limietverdeling van  $nU_{1:n}$ .

4. Gegeven:  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n \geq 2$ , is een steekproef uit de GAM( $\theta^{-1}, 3$ )-verdeling.

- (a) Bepaal de gezamenlijke pdf van  $V = X_1 / (X_1 + X_2)$  en  $W = X_1 + X_2$ . Zijn  $V$  en  $W$  s.o.?
- (b) Bereken de verwachting,  $E(S^{-1})$ , waarbij  $S = \sum_{i=1}^n X_i$ .

**Succes!!!**

## Oplossingen

1. De simultane pdf van  $(X, Y, Z)$  wordt gegeven door

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = x^2 e^{-x(1+y+z)}, \quad x, y, z > 0$$

(a) Bepaal de marginale pdf,  $f_Y(y)$  van  $Y$ .

$$\begin{aligned} f_{Y,Z}(y, z) &= \int_0^\infty x^2 e^{-x(1+y+z)} dx \\ &= \frac{1}{(1+y+z)^3} \int_0^\infty v^2 e^{-v} dv \\ &= \frac{2}{(1+y+z)^3}. \\ f_Y(y) &= \int_0^\infty \frac{2}{(1+y+z)^3} dz \\ &= \left[ -(1+y+z)^{-2} \right]_{z=0}^\infty \\ &= \frac{1}{(1+y)^2}, \quad y > 0. \end{aligned}$$

Dus  $Y$  volgt een PAR(1,1)-verdeling.

(b) Bereken de voorwaardelijke pdf van  $(Y, Z|X)$ ,  $f_{Y,Z|X}(y, z|x)$ .

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x, y) &= x^2 e^{-x(1+y)} \int_0^\infty e^{-xz} dz \\ &= x e^{-x(1+y)}, \quad x, y > 0 \\ f_X(x) &= \int_0^\infty x e^{-x(1+y)} dy \\ &= x e^{-x} \int_0^\infty e^{-xy} dy \\ &= e^{-x}, \quad x > 0 \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} f_{Y,Z|X}(y, z|x) &= \frac{f_{X,Y,Z}(x, y, z)}{f_X(x)} \\ &= x^2 e^{-x(y+z)} \\ &= x e^{-xy} x e^{-xz}, \quad y, z > 0. \end{aligned}$$

Merk op dat  $Y$  en  $Z$  dus s.o. zijn, gegeven  $X = x$ , hoewel  $Y$  en  $Z$  zijn niet s.o. zijn, zoals uit het tussenresultaat bij (a) al bleek.

(c) Beschouw de simultane transformaties  $U = X$ ,  $V = XY$  en  $W = XZ$ . Zijn  $U$ ,  $V$  en  $W$  s.o.? De inverse transformatie is  $X = U$ ,  $Y = V/U$  en  $Z = W/U$ . De Jacobiaan is

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} & 0 \\ -\frac{w}{u^2} & 0 & \frac{1}{u} \end{pmatrix},$$

dus  $|J| = \frac{-1}{u^2}$ . De gezamenlijke pdf is dus

$$f_{U,V,W}(u, v, w) = u^{-2}u^2e^{-u-v-w} = e^{-v-w-u}, \quad u, v, w > 0$$

wat het product is van drie EXP(1) pdf's, dus zijn  $u, v$  en  $w$  s.o.

2. Laat  $V_1$  en  $V_2$  twee onafhankelijke  $N(0, 1)$  variabelen voorstellen.

(a) Geef de simultane MGF  $M_{X,Y}(s, t)$ , voor  $X = V_1$  en  $Y = V_1 - V_2$ .

$$\begin{aligned} M_{X,Y}(s, t) &= E(e^{sX+tY}) = E(e^{sV_1+t(V_1-V_2)}) \\ &= E(e^{(s+t)V_1-tV_2}) \underset{s.o.}{=} e^{\frac{1}{2}(s+t)^2 + \frac{1}{2}(-t)^2} \\ &= e^{\frac{1}{2}s^2 + st + t^2}. \end{aligned}$$

Veel gemaakte fout:  $-t^2$  in de exponent in plaats van  $(-t)^2 = t^2$ .

(b) Welke bekende verdelingen volgen de volgende grootheden?

- (i)  $X + Y$
- (ii)  $V_1/\sqrt{V_2^2}$
- (iii)  $V_1^2/V_2^2$ 
  - (i)  $X + Y = 2V_1 - V_2$  is normaal verdeeld met verwachting 0 en variantie  $2^2 + 1^2 = 5$ , dus  $N(0, 5)$ .  
Veel gemaakte fout:  $X$  en  $Y$  s.o. verondersteld i.p.v.  $V_1$  en  $V_2$ .
  - (ii)  $V_1 \sim N(0, 1)$  en  $\sqrt{V_2} \sim \chi^2(1)$  zijn s.o. dus is de breuk  $t(1)$ -verdeeld.
  - (iii) Omdat  $V_i^2 \sim \chi^2(1)$  en teller en noemer s.o. zijn hebben we te maken met een  $F(1, 1)$ -verdeelde kansvariabele.

3. Gegeven is dat  $U_1, \dots, U_n$  s.o. zijn en UNIF(0, 1) verdeeld.

(a) Geef een functie  $g(u)$ , zodat  $W_i \equiv g(U_i) \sim \text{WEI}(1, 3)$ .

Men kan de inverse CDF van de WEI(1, 3) verdeling gebruiken voor dit doeleinde. De CDF is  $F_W(w) = 1 - \exp(-w^3)$ . Los op  $1 - \exp(-w^3) = u$ . Dit geeft  $w = (-\log(1 - u))^{\frac{1}{3}}$ , dus vinden we  $g(u) = (-\log(1 - u))^{\frac{1}{3}}$ . Overigens voldoet  $g(u) = (-\log u)^{\frac{1}{3}}$  ook, omdat  $U$  en  $1 - U$  dezelfde (UNIF(0, 1))-verdeling hebben.

Veel gemaakte fout: niet op het idee komen dat  $g(\cdot)$  de inverse CDF van de WEI(1, 3)-verdeling is (zie commentaar in het boek onder Stelling 6.3.4, p. 202).

(b) Stel,  $n$  is oneven, dus  $n = 2k - 1$  voor zekere  $k$ , zodat  $U_{k:n}$  de steekproefmediaan van  $U_1, \dots, U_n$  is. Geef met behulp van de ongelijkheid van Jensen een afchatting van  $E(U_{k:n}^2)$ .

De functie  $Y(v) = v^2$  is convex, dus zegt Jensen's ongelijkheid in het algemeen

$$E(Y(V)) \geq Y(E(V)).$$

Voor  $V = U_{k:n}$ , de steekproefmediaan uit de UNIF(0, 1)-verdeling weten we (symmetrie)  $E(U_{k:n}) = \frac{1}{2}$ . Dan zegt Jensen's ongelijkheid dus

$$E(U_{k:n}^2) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Veel gemaakte fout: stelling 7.5.1 toepassen (asymptotische normaliteit van  $U_{k:n}$ ). Dit geeft geen bruikbaar resultaat voor  $n$  eindig.

(c) Bepaal de limietverdeling van  $nU_{1:n}$ .

$$F_{U_{1:n}}(u) = P(U_{1:n} \leq u) = 1 - (1 - u)^n, \quad y > 0,$$

dus

$$G_n(u) = F_{nU_{1:n}}(u) = P(nU_{1:n} \leq u) = 1 - (1 - u/n)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - e^{-u}, \quad u > 0$$

dus  $nU_{1:n}$  heeft de EXP(1)-verdeling als limietverdeling.

4. Gegeven:  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n \geq 2$ , is een steekproef uit de GAM( $\theta^{-1}, 3$ )-verdeling. Veel gemaakte fout: vergeten de drager op te geven van de limietverdeling ( $u > 0$ ).

(a) Bepaal de gezamenlijke pdf van  $V = X_1/(X_1 + X_2)$  en  $W = X_1 + X_2$ . Zijn  $V$  en  $W$  s.o?

De pdf van  $X_i$ ,  $i = 1, 2$  is  $f_X(x) = \frac{\theta^3}{2} x^2 e^{-x/\theta}$ . De inverse transformatie is  $X_1 = VW$ ,  $X_2 = (1 - V)W$ . De jacobiaan is

$$J = \begin{pmatrix} w & v \\ -w & 1 - v \end{pmatrix}$$

en  $\det J = w$ , zodat

$$\begin{aligned} f_{V,W}(v, w) &= \frac{\theta^6}{4} v^2 (1 - v)^2 w^5 e^{-vw\theta - w(1-v)\theta} \\ &= \frac{\theta^6}{4} v^2 (1 - v)^2 w^5 e^{-w\theta}. \end{aligned}$$

Omdat dit factoriseert in een functie van  $v$  en van  $w$  zijn  $V$  en  $W$  s.o. Veel gemaakte fout:  $((1 - v)w)^2$  uitschrijven als  $w^2 - 2vw^2 + v^2w^2$ , en vervolgens niet herkennen dat de joint pdf een product v.e. functie van  $w$  en  $v$  is.

(b) Bereken de verwachting,  $E(S^{-1})$ , waarbij  $S = \sum_{i=1}^n X_i$ . We hebben  $S \sim \text{GAM}(\theta^{-1}, 3n)$ , dus

$$f_S(s; \theta) = \frac{\theta^{3n}}{\Gamma(3n)} s^{3n-1} e^{-s\theta},$$

dus

$$\begin{aligned} E(S^{-1}) &= \int_0^\infty \frac{\theta^{3n}}{\Gamma(3n)} s^{(3n-1)-1} e^{-s/\theta} ds \\ &= \frac{\theta}{3n-1} \int_0^\infty \frac{\theta^{3n-1}}{\Gamma(3n-1)} s^{(3n-1)-1} e^{-s/\theta} ds \\ &= \frac{\theta}{3n-1}, \end{aligned}$$

omdat de laatste integraal een integraal over de  $\text{GAM}(\theta^{-1}, 3n-1)$ -dichtheid is (en dus 1 is).

Veel gemaakte fouten: aannemen dat  $E(1/S) = 1/E(S)$  (niet waar!), en/of de pdf van  $S$  niet kunnen geven.