

Tentamen Kres 3, 031105, 09.30–12.30

Motiveer uw antwoorden, antwoorden zonder motivatie worden niet goed gerekend. Denk aan de dragers. Ieder onderdeel is 10 punten waard. Bij het tentamen mag alleen gebruik worden gemaakt van een (zelf mee te nemen) onbeschreven kopie van Appendix B van Bain en Engelhardt.

1. Gegeven is de volgende joint pdf

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = \begin{cases} c(x^2 - y^2)e^{-x-z}, & x > 0, -x < y < x, z > 0 \\ \text{elders.} & \end{cases}$$

- Bepaal c .
- Bereken $E[Y|X = x]$ en $\text{cov}(X, Y)$.
- Laat zien dat X en Z s.o. zijn en bereken de pdf van $W := X - Y$.

2. Van (X, Y) is de MGF gegeven:

$$M_{X,Y}(s, t) = \exp \{s + s^2 + t^2 - st\}.$$

- Geef de joint MGF van (V, W) waarbij $V := X + Y$, $W := X - aY$. Voor welke waarde(n) van a zijn V en W s.o.?
- Wat is de verdeling van $\frac{1}{2}Y^2$?

3. Laat X_1, \dots, X_n s.o. zijn met $X_i \sim \text{GAM}(\theta, 2)$.

- Geef de pdf van $S := \sum_{i=1}^n X_i$.
- Laat zien hoe u met behulp van de F -tabel de volgende kans uitrekt:

$$\mathbb{P} \left[\frac{X_1 + X_2}{X_1 + X_2 + X_3} < c \right].$$

- Toon aan dat $\frac{X_1}{X_1 + X_2}$ en $X_1 + X_2$ s.o. zijn.

4. Beschouw een steekproef X_1, \dots, X_n uit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

- Wat is de limietverdeling van $n(\theta - X_{n:n})$ als $n \rightarrow \infty$?
- Toon aan dat $X_{n:n} \xrightarrow{p} \theta$ en geef de limietverdeling van

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \frac{3}{4}\theta}{X_{n:n} \sqrt{\frac{3}{80}}}.$$

Succes!!!