Uitwerking Tentamen Kres 3, 031105

1. (a) De joint pdf van (X,Y) krijgen we door $f_{X,Y,Z}(x,y,z)$ over z te integreren:

$$f_{X,Y}(x,y) = c(x^2-y^2)e^{-x}\int_0^\infty \underbrace{e^{-z}}_{\text{EXP(1) pdf}} dz = c(x^2-y^2)e^{-x}, \quad x>0, -x<y<x$$

De marginale pdf van X is:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= c\int_{-x}^{x}(x^2-y^2)e^{-x}\,dy = ce^{-x}\left[x^2y-\frac{1}{3}y^3\right]\Big|_{y=-x}^{x} = ce^{-x}\left(2x^3-\frac{2}{3}x^3\right) \\ &= \frac{4}{3}cx^3e^{-x}, \quad x>0 \end{aligned}$$

en c volgt uit het gelijkstellen van de integraal van $f_X(x)$ aan 1:

$$1 = \int_0^\infty \frac{4}{3}cx^3e^{-x}\,dx = c\frac{4\Gamma(4)}{3}\int_0^\infty \underbrace{\frac{1}{1^4\Gamma(4)}x^3e^{-x}}_{\text{GAM}(4,1)\text{ pdf}}\,dx = 8c \quad\Rightarrow\quad c=\frac{1}{8}$$

(b) De voorwaardelijke pdf van Y gegeven $X=x$ is:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{3(x^2-y^2)}{4x^3}, \quad -x<y<x.$$

De voorwaardelijke verwachting van Y gegeven $X=x$ is:

$$E[Y|X=x] = \int_{-x}^{x}\frac{3}{4}\frac{x^2-y^2}{x^3}y\,dy = \frac{3}{4x^3}\left[\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{1}{4}y^4\right]\Big|_{y=-x}^{x} = 0.$$

(Dit was ook direct uit de symmetrie $X \leftrightarrow -X$ te concluderen.)

$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[XY]-E[X]E[Y] = E[XE[Y|X]]-E[X]E[E[Y|X]] = 0-0=0.$

(c) De joint pdf van (X,Z):

$$\begin{aligned} f_{X,Z}(x,z) &= c\int_{-x}^{x}(x^2-y^2)e^{-x-z}\,dy = ce^{-x-z}\left[x^2y-\frac{1}{3}y^3\right]\Big|_{y=-x}^{x} = c\frac{4}{3}x^3e^{-x-z} \\ &= \frac{1}{6}x^3e^{-x-z}, \quad x,z>0. \end{aligned}$$

De pdf factoriseert en de drager is een Carthetisch produkt $\Rightarrow$ X en Z zijn s.o. Voor het bepalen van de verdeling van $X-Y$ gaan we transformeren; $V=X+Y$, $W=X-Y$, met inverse $X=(V+W)/2$, $Y=(V-W)/2$. We vinden $J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$ zodat

$$f_{V,W}(v,w) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\left(\left(\frac{v+w}{2}\right)^2-\left(\frac{v-w}{2}\right)^2\right)e^{-(v+w)/2} = \frac{1}{4}ve^{-v/2}\frac{1}{4}we^{-w/2}, \quad v,w>0$$

Dus $f_W(w)=\frac{1}{4}we^{-w/2}$, $w>0$, de pdf van een GAM$(2,2)$ verdeling.

2. (a)

$$\begin{aligned}
M_{V,W}(s,t) &= E\left[e^{sV+tW}\right] = E\left[e^{s(X+Y)+t(X-aY)}\right] \\
&= E\left[e^{(s+t)X+(s-at)Y}\right] \\
&= M_{X,Y}(s+t, s-at) \\
&= \exp\left(s+t+s^2+2st+t^2+s^2-2ast+a^2t^2-s^2+at^2-st+ast\right) \\
&= \exp\left(s+t+s^2+(1+a+a^2)t^2+(1-a)st\right).
\end{aligned}$$

Dit is de joint MGF van twee onafhankelijke stochasten V en W d.e.s.d.a. de MGF factoriseert in een functie van s en t, dus d.e.s.d.a. $a = 1$.

(b) $M_Y(t) = M_{X,Y}(0,t) = e^{t^2}$. Volgens de tabel van appendix B is dan $Y \sim \mathrm{N}(0,2)$ zodat $\frac{Y}{\sqrt{2}} \sim \mathrm{N}(0,1)$, en dus $Y^2/2 \sim \chi^2(1)$.

3. (a) $M_S(t) = E[e^{tX_1+\cdots+tX_n}] \overset{\text{s.o.}}{=} (M_X(t))^n = \left(\frac{1}{1-\theta t}\right)^{2n}$, dus $S = \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathrm{GAM}(\theta, 2n)$. Dit antwoord had men ook direct mogen geven middels het onthouden van het resultaat van voorbeeld 6.4.6. De bijbehorende pdf is: $f_S(s) = \frac{1}{\theta^{2n}\Gamma(2n)} s^{2n-1}e^{-s/\theta}$, $s > 0$ (alleen juiste verdeling, dus $\mathrm{GAM}(\theta, 2n)$ zonder expliciet de pdf te geven wordt ook goedgerekend).

(b) We maken gebruik van Stelling 8.3.3 die zegt dat als $X \sim \mathrm{GAM}(\theta, \kappa)$, dan $2X/\theta \sim \chi^2(2\kappa)$:

$$\begin{aligned}
P\left[\frac{X_1+X_2}{X_1+X_2+X_3} < c\right] &= P\left[\frac{1}{1+\frac{X_3}{X_1+X_2}} < c\right] = P\left[1 + \frac{X_3}{X_1+X_2} > \frac{1}{c}\right] \\
&= P\left[\frac{X_3}{X_1+X_2} > \frac{1-c}{c}\right] = P\left[\frac{2X_3/\theta}{2X_1/\theta + 2X_2/\theta} > \frac{1-c}{c}\right] \\
&= P\left[\frac{\chi^2(4)}{\chi^2(8)} > \frac{1-c}{c}\right] = P\left[\frac{\chi^2(4)/4}{\chi^2(8)/8} > 2\frac{1-c}{c}\right] \\
&= P\left[F(4,8) > 2\frac{1-c}{c}\right] \text{ of } P\left[F(8,4) < \frac{1}{2}\frac{c}{(1-c)}\right].
\end{aligned}$$

Deze laatste kansen zijn in de F-tabel op te zoeken.

(c) Laat $V := X_1 + X_2$, $W := \frac{X_1}{X_1+X_2}$, dit geeft voor X_1 en X_2 in termen van V en W: $X_1 = VW$, $X_2 = V - VW = V(1-W)$, zodat $J = \begin{vmatrix} w & v \\ 1-w & -v \end{vmatrix} = -vw - v + vw = -v$. Dit geeft

$$\begin{aligned}
f_{V,W}(v,w) &= v\frac{1}{\theta^4(\Gamma(2))^2}(vw)e^{-vw/\theta}(v(1-w))e^{-v(1-w)/\theta} \\
&= \frac{v^3w(1-w)}{\theta^4}e^{-v/\theta}, \quad v > 0, 0 < w < 1
\end{aligned}$$

De pdf factoriseert en de drager is een Carthetisch produkt, dus zijn V en W s.o.

4. $F_X(x) = \left(\frac{x}{\theta}\right)^3$ voor $0 < x < \theta$

(a) Laat $Y_n := n(\theta - X_{n:n})$

$$\begin{aligned} G_n(y) &= P[Y_n \le y] = P[n(\theta - X_{n:n}) \le y] = P\left[\theta - X_{n:n} \le \frac{y}{n}\right] \\ &= P\left[X_{n:n} \ge \theta - \frac{y}{n}\right] = 1 - P\left[X_{n:n} \le \theta - \frac{y}{n}\right] = 1 - \left(F_X(\theta - \frac{y}{n})\right)^n \\ &= 1 - \left(1 - \frac{y}{\theta n}\right)^{3n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - e^{-3y/\theta}, \quad y > 0. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P[|X_{n:n} - \theta| < \varepsilon] &= P[\theta - X_{n:n} < \varepsilon] = P[X_{n:n} > \theta - \varepsilon] \\ &= 1 - P[X_{n:n} < \theta - \varepsilon] = 1 - \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^{3n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1, \quad 0 < \varepsilon < \theta \end{aligned}$$

Dus $X_{n:n} \xrightarrow{p} \theta$.

Nu berekenen we eerste de verwachting en variantie om de CLS te kunnen toepassen.

$$E[X^k] = \int_0^\theta \frac{x^{k+3}}{\theta^3}\, dx = \frac{3}{(3+k)\theta^3}\, x^{3+k}\Big|_{x=0}^{\theta} = \frac{3}{3+k}\theta^k.$$

Dus $E[X] = \frac{3}{4}\theta$, $E[X^2] = \frac{3}{5}\theta$, en dus $\mathrm{var}X = E[X^2] - (E[X])^2 = \left(\frac{3}{5} - \frac{9}{16}\right)\theta^2 = \left(\frac{48-45}{80}\right)\theta^2 = \frac{3}{80}\theta^2$.

Volgens de CLS geldt

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \frac{3}{4}\theta}{\theta\sqrt{\frac{3}{80}}} \xrightarrow{d} Z \sim \mathrm{N}(0,1).$$

Op een factor $\theta/X_{n:n}$ na is dit de uitdrukking waarvoor we de limietverdeling moeten bepalen. Met behulp van het lemma van Slutsky (St.7.7.4(3)) volgt:

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \frac{3}{4}\theta}{X_{n:n}\sqrt{\frac{3}{80}}} = \underbrace{\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \frac{3}{4}\theta}{\theta\sqrt{\frac{3}{80}}}}_{\xrightarrow{d} Z} \underbrace{\frac{\theta}{X_{n:n}}}_{\xrightarrow{p} 1} \xrightarrow{d} Z \sim \mathrm{N}(0,1).$$