

Uitwerking tentamen KReS3, 220104

1. (a) Berekenen van c :

$$f_{X,Y}(x, y) = c(x + y) \int_0^\infty z e^{-z} dz = c(x + y), \quad 0 < y < x < 1.$$

De integraal over z is 1 want de integrand is de pdf van een GAM(1,2) verdeelde stochast.

$$f_X(x) = c \int_0^x (x + y) dy = c \frac{3x^2}{2}, \quad 0 < x < 1.$$

$$\int_0^1 f_X(x) dx = \frac{1}{2} c = 1$$

hieruit volgt dat $c = 2$

Marginale verdeling van Y :

$$f_Y(y) = c \int_y^1 (x + y) dx = c \left(\frac{1}{2} x^2 + yx \right) \Big|_{x=y}^1 = c \left(\frac{1}{2} + y - \frac{3}{2} y^2 \right) = 1 + 2y - 3y^2,$$

voor $0 < y < 1$.

- (b)

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} = \frac{2(x + y)}{3x^2}, \quad 0 < y < x < 1.$$

$$E[Y|X = x] = \int_0^x y \frac{2(x + y)}{3x^2} dy = \frac{5x}{9}$$

$$E[X] = \int_0^1 3x^3 dx = \frac{3}{4}$$

$$E[Y] = \int_0^1 y(1 + 2y - 3y^2) dy = \frac{5}{12}$$

$$E[XY] = E[XE[Y|X]] = \frac{5}{9} E[X^2] = \frac{35}{59} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{3} - \frac{3}{4} \frac{5}{12} = \frac{1}{48}$$

- (c) De inverse transformatie is $X = V$, $Y = W - V$ met $\det J = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \right| = 1$.

$$f_{V,W}(v, w) = 2(v + (w - v)) = 2w, \quad 0 < w - v < v < 1.$$

De condities op v en w kunnen worden herschreven tot: $0 < v < 1$ en $v < w < 2v$. Hoewel de joint pdf factoriseert zijn V en W niet s.o. (wegens $v < w < 2v$ is de drager geen Carthetisch product).

2. (a) $X_i \sim N(0, 1)$, dus $X_i^2 \sim \chi^2(1)$, en X_i^2 s.o. $M_V(s) = E[e^{s(X_1^2+X_2^2)}] = M_{X_1^2}(s)M_{X_2^2}(s) = \left(\frac{1}{1-2s}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-2s}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{1-2s}\right)$, de MGF van een $\chi^2(2)$ verdeelde stochast. De $\chi^2(2)$ en de EXP(2) verdeling zijn identiek (zie tabel B).

(b)

$$\begin{aligned} M_{V,W}(s, t) &= E[e^{s(X_1^2+X_2^2)+t(X_1^2-X_2^2)}] = E[e^{(s+t)X_1^2}e^{(s-t)X_2^2}] \\ &= M_{X_1}(s+t)M_{X_2}(s-t) = \left(\frac{1}{1-2(s+t)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-2(s-t)}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Deze joint MGF is niet te schrijven als een product van een functie van s en van t . V en W zijn dus niet s.o.

3. Op de drager $0 < x < \theta$ is de CDF $F_X(x) = \left(\frac{x}{\theta}\right)^3$

a $P[|X_{n:n} - \theta| \leq \epsilon] = P[\theta - X_{n:n} \leq \epsilon] = P[X_{n:n} \geq \theta - \epsilon] = 1 - P[X_{n:n} < \theta - \epsilon] = 1 - \left(\frac{\theta - \epsilon}{\theta}\right)^{3n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ voor $0 < \epsilon < \theta$ (en dus zeker voor $\epsilon \geq \theta$).

b Laat $Y_n = nX_{1:n}$. $G_n(y) = P[Y_n \leq y] = P[nX_{1:n} \leq y] = P[X_{1:n} \leq \frac{y}{n}] = 1 - (1 - F_X(\frac{y}{n}))^n = 1 - \left(1 - \left(\frac{y}{\theta n}\right)^3\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ voor alle y . (de limietverdeling bestaat niet)

c Laat $W = X^3$. Voor de CDF van W vinden we $P[W \leq w] = P[X^3 \leq w] = F_X(w^{\frac{1}{3}}) = \frac{w}{\theta^3}$ voor $0 < w < \theta^3$. W is dus UNIF(0, θ^3) verdeeld, zodat $E[W] = \frac{1}{2}\theta^3$, $\text{Var}(W) = \frac{\theta^6}{12}$. Volgens de CLS is dan

$$V_n \equiv \sqrt{n} \frac{\bar{W} - \frac{1}{2}\theta^3}{\left(\frac{\theta^3}{\sqrt{12}}\right)} = \frac{\sqrt{12n}}{\theta^3} (\bar{W} - \frac{1}{2}\theta^3)$$

asymptotisch $N(0, 1)$ verdeeld. Met behulp van de stelling van Slutsky volgt dat dan ook (wegens $X_{n:n} \xrightarrow{p} \theta$) dat $W_n = \frac{\sqrt{12n}}{\theta^3} \frac{\theta^3}{X_{n:n}^3} (\bar{W} - \frac{1}{2}\theta^3)$ asymptotisch $N(0, 1)$ verdeeld is. Er volgt dat $Y_n = \frac{1}{\sqrt{12}} W_n$ asymptotisch $N(0, \frac{1}{12})$ verdeeld is.

4. a Laat $V_1 = X_1 + X_2$ en $V_2 = X_3 + X_4$. $V_1, V_2 \sim \text{GAM}(\theta, 4)$. Wegens onafhankelijkheid van de X_i zijn V_1 en V_2 ook s.o. De gevraagde kans is

$$\begin{aligned} P\left[\frac{V_1 - V_2}{V_1 + V_2} < \frac{1}{4}\right] &= P\left[\frac{T-1}{T+1} < \frac{1}{4}\right] = P\left[T-1 < \frac{1}{4}(T+1)\right] \\ &= P\left[\frac{3}{4}T < \frac{5}{4}\right] = P\left[T < \frac{5}{3}\right] \end{aligned}$$

met $T = \frac{V_1}{V_2} = \frac{2V_1}{\theta} \frac{\theta}{2V_2}$. Omdat $\frac{2V_i}{\theta} \sim \chi^2(8)$, volgt dat $T \sim F(8, 8)$.

- b Inverse: $X_1 = VW$, $X_2 = V(1 - W)$. $\det J = \left| \begin{pmatrix} w & v \\ 1-w & -v \end{pmatrix} \right| = -v$.

$$\begin{aligned} f_{V,W}(v, w) &= \frac{v}{\theta^4 \Gamma(2)^2} v^2 w(1-w) e^{-vw/\theta} e^{-v(1-w)/\theta} \\ &= \frac{v}{\theta^4 \Gamma(2)^2} v^2 w(1-w) e^{-v/\theta} \quad v > 0, 0 < w < 1 \end{aligned}$$

De pdf factoriseert en de drager is een Carthetisch product, dus V en W zijn s.o.