

## Uitwerking tentamen KReS3, 301003

1. a Berekenen van  $c$ :

$$\begin{aligned}
 1 &= c \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty (x+y+z)e^{-x-y-z} dx dy dz \\
 &= c \int_0^\infty \int_0^\infty (1+y+z)e^{-y-z} dy dz \\
 &= c \int_0^\infty (2+z)e^{-z} dz \\
 &= 3c
 \end{aligned}$$

Er volgt dat  $c = \frac{1}{3}$ . Er is gebruik gemaakt van het feit dat  $e^{-x}$ ,  $x > 0$  de pdf is van een EXP(1) verdeelde stochast, zeg  $W$ , zodat  $\int_0^\infty e^{-x} dx = 1$  en  $\int_0^\infty x e^{-x} dx = E[W] = 1$ .

Alternatieve wijze: Bereken eerst  $I = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty x e^{-x-y-z} dx dy dz = \int_0^\infty x e^{-x} dx = E[W]$  met  $W \sim \text{EXP}(1)$ . Dit geeft  $I = 1$ . Wegens symmetrie onder verwisselen van  $x, y, z$  zijn ook de integralen over  $y$  en  $z$  gelijk aan 1, zodat  $3c = 1$ , ofwel  $c = \frac{1}{3}$ .

Marginale verdeling van  $Z$ :

$$\begin{aligned}
 f_Z(z) &= \frac{1}{3} \int_0^\infty \int_0^\infty (x+y+z) dx dy \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^\infty (1+y+z)e^{-y-z} dy \\
 &= \frac{1}{3}(2+z)e^{-z}, \quad (z > 0)
 \end{aligned}$$

- b  $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{3} \int_0^\infty (x+y+z)e^{-x-y-z} dz = \frac{1}{3}(x+y+1)e^{-x-y}$  voor  $x, y > 0$ .

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{(x+y+1)e^{-x-y}}{(2+x)e^{-x}} = \frac{x+y+1}{2+x} e^{-y}, \quad y > 0.$$

$E(Y|X = x) = \int_0^\infty y \frac{x+y+1}{2+x} e^{-y} dy = \frac{1}{2+x} ((1+x)E[W] + E[W^2])$  met  $W \sim \text{EXP}(1)$ . Er geldt  $E[W] = 1$ , en  $E[W^2] = \text{Var}(W) + E[W]^2 = 1 + 1 = 2$ , zodat  $E(Y|X = x) = \frac{3+x}{2+x}$ .

$$E[XY] = E[XE[Y|X]] = \frac{1}{3} \int_0^\infty (2+x)e^{-x} x \frac{3+x}{2+x} dx = \frac{1}{3} \int_0^\infty (3+x)xe^{-x} dx = \frac{5}{3}.$$

$$E[X] = E[Y] = \int_0^\infty \frac{1}{3} x(2+x)e^{-x} dx = \frac{4}{3}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{5}{3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = -\frac{1}{9}$$

- c Bekijk de transformatie  $U = X$ ,  $W = X + Y$ ,  $V = X + Y + Z$ , met inverse  $X = U$ ,  $Y = W - U$ ,  $Z = V - W$ . De Jacobiaan is  $J = 1$ , zodat

$$f_{U,V,W}(u, v, w) = \frac{1}{3} v e^{-v}, \quad (0 < u < w < v < \infty)$$

Integreren over alle mogelijk  $u$  waarden, gegeven  $w$  en  $v$  geeft

$$f_{V,W}(v, w) = \int_0^w \frac{1}{3} v e^{-v} du = \frac{1}{3} v w e^{-v}, \quad (0 < w < v < \infty)$$

Hoewel de joint pdf factoriseert zijn  $V$  en  $W$  niet s.o. (wegens  $w < v$  is de drager geen Carthetisch product).

2. a  $M_{V,W}(s,t) = E[e^{sV+tW}] = E[e^{sX+\sqrt{2}tY-tX}] = E[e^{(s-t)X+\sqrt{2}tY}] = M_{X,Y}(s-t, \sqrt{2}t) = e^{\frac{1}{2}(s-t)^2 + \frac{1}{2}2t^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(s-t)\sqrt{2}t} = e^{\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}t^2}$  zodat  $(V,W) \sim \text{BVN}(0,0,1,1,0)$ .
- b  $V, W$  zijn s.o. en  $\sim N(0,1)$  zodat  $V^2, W^2$  s.o. en  $\chi^2(1)$ . We weten dat de som  $V^2 + W^2$  dan  $\chi^2(2)$  verdeeld is.

3.  $F_X(x) = 1 - \frac{\theta}{x}, x > \theta$ .

- a  $P[|X_{1:n} - \theta| \leq \epsilon] = P[X_{1:n} \leq \theta + \epsilon] = 1 - P[X_{1:n} > \theta + \epsilon] = 1 - (1 - F_X(\theta + \epsilon))^n = 1 - \left(\frac{\theta}{\theta + \epsilon}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$
- b Stel  $Y_n = n(X_{1:n} - \theta)$ .  $G_n(y) = P[Y_n \leq y] = P[n(X_{1:n} - \theta) \leq y] = P[X_{1:n} \leq \theta + \frac{y}{n}] = 1 - (1 - F_X(\theta + \frac{y}{n}))^n = 1 - \left(1 + \frac{y}{\theta n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - e^{-\frac{y}{\theta}}$  volgens vergelijking (7.2.7), dit is de CDF van een  $\text{EXP}(\theta)$  verdeelde stochast.
- c Laet  $W = \frac{1}{X}$ . Voor de CDF van  $W$  vinden we  $P[W \leq w] = P[X \geq \frac{1}{w}] = 1 - F_X(\frac{1}{w}) = \theta w$  voor  $0 < w < \frac{1}{\theta}$ .  $W$  is dus  $\text{UNIF}(0, \frac{1}{\theta})$  verdeeld, zodat  $E[W] = \frac{1}{2\theta}$ ,  $\text{Var}(W) = \frac{1}{12\theta^2}$ . Volgens de CLS is dan

$$V_n \equiv \sqrt{n} \frac{\bar{W} - \frac{1}{2\theta}}{\left(\frac{1}{\sqrt{12}\theta}\right)} = \sqrt{12}\sqrt{n}\theta(\bar{W} - \frac{1}{2\theta})$$

asymptotisch  $N(0,1)$  verdeeld. Met behulp van de stelling van Slutsky volgt dat dan ook (wegens  $X_{1:n} \xrightarrow{p} \theta$ ) dat  $W_n = \sqrt{12}\sqrt{n}X_{1:n}(\bar{W} - \frac{1}{2\theta})$  asymptotisch  $N(0,1)$  verdeeld is. Er volgt dat  $Y_n = \frac{W_n}{\sqrt{12}}$  asymptotisch  $N(0, \frac{1}{12})$  verdeeld is.

4. a  $X_i$  s.o. en  $\sim \text{EXP}(\theta)$ , ofwel  $\text{GAM}(\theta, 1)$ , zodat  $\frac{2X_i}{\theta} \sim \chi^2(2)$ .
- Laet  $W \equiv \frac{\sum_{i=1}^4 X_i}{\sum_{i=5}^{10} X_i} = \frac{2\theta \sum_{i=1}^4 X_i}{2\theta \sum_{i=5}^{10} X_i} \sim \frac{V}{W}$  met  $V \sim \chi^2(8)$ , en  $W \sim \chi^2(12)$  s.o., zodat volgens de definitie van de F-verdeling  $Z = \frac{12V}{8W} \sim F(8, 12)$ . Uit appendix B:

$$f_Z(z) = \frac{\Gamma(10)}{\Gamma(4)\Gamma(6)} \left(\frac{2}{3}\right)^4 z^3 \left(1 + \frac{2}{3}z\right)^{-10}, \quad (z > 0)$$

Transformeren naar  $W = \frac{2}{3}Z$  geeft  $|J| = \frac{2}{3}$ , en

$$f_W(w) = \frac{3}{2}f_Z\left(\frac{3}{2}w\right) = \frac{3}{2} \frac{\Gamma(10)}{\Gamma(4)\Gamma(6)} \left(\frac{2}{3}\right)^4 \frac{3}{2} w^3 (1+w)^{-10} = \frac{\Gamma(10)}{\Gamma(4)\Gamma(6)} w^3 (1+w)^{-10}, \quad (w > 0)$$

- b Bekijk de transformatie  $Y = X_1, Z = \frac{X_1}{X_1+X_2}$  met inverse transformatie  $X_1 = Y, X_2 = Y\left(\frac{1}{Z} - 1\right)$ . De Jacobiaan is  $J = -\frac{y}{z^2}$ , zodat  $|J| = \frac{y}{z^2}$ . Er volgt

$$f_{Y,Z}(y,z) = \frac{y}{z^2} \frac{1}{\theta^2} e^{-y} e^{-y\left(\frac{1}{z}-1\right)} = \frac{y}{\theta^2 z^2} e^{-y/z}, \quad (y > 0, 0 < z < 1)$$

$Y$  en  $Z$  zijn niet s.o. (de pdf is niet te schrijven als het product van een functie van  $y$  en een functie van  $z$ )