

Tentamen Kres 4, 4 januari 2010, 13:00–16:00

Antwoorden motiveren; kritieke gebieden en betrouwbaarheidsintervallen zo uitvoerig mogelijk beschrijven. Ieder onderdeel is 10 punten waard. U dient uit te gaan van een steekproef van omvang n uit de betreffende pdf. Bij het tentamen mag alleen gebruik worden gemaakt van een (zelf mee te nemen) onbeschreven kopie van Appendix B van Bain en Engelhardt!

1.

$$f_X(x; \theta) = 2\theta x e^{-\theta x^2} I_{(0, \infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

- Bepaal de MLE $\hat{\theta}$ van θ , en bereken de verwachte waarde $E(\hat{\theta})$. Is $\hat{\theta}$ zuiver voor θ ?
- Geef de complete en sufficient (C&S) statistic voor θ , en bepaal de UMVUE van θ . Bereikt de variantie van de UMVUE de CRLB voor zuivere schatters van θ ?
- Geef een $100\gamma\%$ gelijkstaartig betrouwbaarheidsinterval voor θ gebaseerd op de C&S statistic.
- Stel, voor het toetsen van $H_0: \theta \geq 3$ tegen $H_a: \theta < 3$ gebruikt men: verwerp H_0 als $X_{1:n} > \frac{1}{\sqrt{n}}$. Bereken en schets de powerfunctie $\pi(\theta)$ van deze toets. Wat is de grootte van deze toets?
- Geef de GLR, grootte α , toets voor $H_0: \theta = 1$ tegen $H_a: \theta \neq 1$.

2.

$$f_X(x; \theta) = \frac{5}{2} \theta^{-\frac{5}{2}} x^{\frac{3}{2}} I_{[0, \theta]}(x), \quad \theta > 0.$$

- Toon aan dat $S := X_{n:n}$ sufficient is voor θ . Is S tevens complete?
- Geef de UMVUE voor θ .
- Bepaal de MME en de MLE voor θ . Zijn zij MSE consistent?
- Geef een $100\gamma\%$ betrouwbaarheidsondergrens voor θ gebaseerd op S .
- Laat zien dat de gezamenlijke pdf de MLR eigenschap heeft in $t(X_1, \dots, X_n) = X_{n:n}$, en geef de UMP, grootte α , toets voor $H_0: \theta \leq 1$ tegen $H_a: \theta > 1$.

Succes!!!