Tentamen Kres 4, 260309, 09:00–12:00

Antwoorden motiveren; kritieke gebieden en betrouwbaarheidsintervallen zo uitvoerig mogelijk beschrijven. Ieder onderdeel is 10 punten waard. Bij het tentamen mag alleen gebruik worden gemaakt van een (zelf mee te nemen) onbeschreven kopie van Appendix B van Bain en Engelhardt!

1. Gegeven is een onafhankelijke steekproef $X_1, \ldots, X_n$ van grootte n uit een verdeling met pdf

$$f_X(x; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}.$$

   (a) Bepaal de MLE van μ. Betreft het een UMVUE (zo ja/nee waarom wel/niet)?

   (b) Geef de UMVUE van μ^2.

   (c) Construeer een $100\gamma\%$ betrouwbaarheidsondergrens voor $e^{-\mu}$, gebaseerd op $S = \sum_{i=1}^n X_i$.

   (d) Laat zien dat de simultane pdf een MLR eigenschap bezit (in welke statistische grootheid?) en geef de UMP, grootte α, toets voor H_0: $\mu \leq \mu_0$ tegen $\mu > \mu_0$.

   (e) Geef de GLR toets voor H_0: $\mu = 0$ tegen H_a: $\mu \neq 1$.

2. Beschouw een onafhankelijke steekproef $X_1, \ldots, X_n$ uit de volgende verdeling (met $\theta > 0$):

$$f_X(x; \theta) = \frac{2\theta^2}{x^3} I_{[\theta,\infty)}(x)$$

   (a) Laat zien dat de "maximum likelihood estimator" (MLE) gegeven wordt door $\widehat{\theta} = X_{1:n}$. Is de MLE (simply) consistent?

   (b) Is de MLE "sufficient"? En is de MLE compleet?

   (c) Laat zien dat $\tilde{\theta} = \frac{2n-1}{2n} X_{1:n}$ een zuivere schatter voor θ is. Welk van de schatters ($\widehat{\theta}$ of $\tilde{\theta}$) heeft de kleinste "mean squared error" (MSE)?

   (d) Geef een 95% betrouwbaarheidsondergrens voor θ gebaseerd op de MLE.

   (e) Stel dat een toets, voor het geval $n = 10$, dan en slechts dan verwerpt als $X_{1:10} \geq 2.32$. Voor welke waarde van θ is de verwerpingskans van deze toets gelijk aan 5%? Schets de powerfunctie van de toets. Benoem de assen en geef een samengestelde nulhypothese en samengesteld alternatief waarvoor dit een zuivere toets van "size" 5% ($\alpha = 0.05$) is. [Men mag gebruik maken van het feit dat $(0.05)^{\frac{-1}{20}} \simeq 1.16$].

Succes!!!

Oplossingen

1. (a) De likelihood is

$$L(\mu) = 2\pi^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2},$$

en de log-likelihood is

$$\ell(\mu) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

De log-likelihood vergelijking is

$$\frac{d}{d\mu}\ell(\mu) = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0,$$

met als oplossing $\hat{\mu} = \bar{X}$. Dit geeft inderdaad een maximum, omdat

$$\frac{d^2}{d\mu^2}\ell(\mu) = -n < 0.$$

Is de MLE van μ een UMVUE voor μ? Het betreft een pdf uit de REC-familie, immers

$$f_X(x;\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-\frac{1}{2}\mu^2} e^{x\mu}.$$

Dit is van de vorm $c(\mu)h(x)e^{t(x)q(\mu)}$ met $q(\mu) = \mu$ en $t(x) = x$. Concludeer dat de som $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ C&S is voor μ. De MLE is een functie van de C&S: $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, en zuiver ($E(\bar{X}) = E(X) = \mu$) dus is $\bar{X}$ inderdaad UMVUE voor μ.

(b) We weten dat $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{1}{n})$. We zoeken een functie van $\bar{X}$ met verwachting μ^2. Probeer

$$E(\bar{X}^2) = (E(\bar{X}))^2 + \mathrm{Var}(\bar{X}) = \mu^2 + \frac{1}{n}$$

Hieruit leiden we af dat $\bar{X}^2 - \frac{1}{n}$ de gezochte UMVUE voor μ^2 is.

(c) $e^{-\mu}$ is dalen in μ. Een $100\gamma\%$ betrouwbaarheidsbovengrens voor μ volgt uit

$$\begin{aligned} P\left(\Phi(1-\gamma) \leq \sqrt{n}\left(\bar{X}-\mu\right)\right) &= \gamma \\ \Leftrightarrow P\left(\mu \leq \bar{X} - z_\gamma/\sqrt{n}\right) &= \gamma \\ \Leftrightarrow P\left(\mu \leq \bar{X} + z_{1-\gamma}/\sqrt{n}\right) &= \gamma, \end{aligned}$$

dus $\mu_u = \bar{X} + \Phi(\gamma)/\sqrt{n}$ is een $100\gamma\%$ betrouwbaarheidsbovengrens voor μ, en daarmee

$$e^{-\mu_u} = e^{-\bar{X}-z_{1-\gamma}/\sqrt{n}} = e^{-\bar{X}+z_\gamma/\sqrt{n}}$$

een 100γ betrouwbaarheidsondergrens voor $e^{-\mu}$.

(d) Voor $\mu_2 > \mu_1$ bepalen we de likelihood ratio:

$$\frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\mu_2)}{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\mu_1)} = e^{(\mu_2-\mu_1)\sum_{i=1}^n x_i} e^{-\frac{1}{2}n(\mu_2^2-\mu_1^2)}.$$

Dit is stijgend in $S = \sum_{i=1}^n$, dus heeft de familie van pdf's de MLR eigenschap in S. De UMP toets voor H_0: $\mu \leq \mu_0$ tegen H_a: $\mu > \mu_0$ bestaat eruit te verwerpen als $\bar{X} \geq k$. Bepaal k uit de eis dat de verwerpingskans α is voor $\mu = \mu_0$. Omdat

$$P\left(\bar{X} \geq \mu_0 + \frac{z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}\right) = \alpha$$

volgt dat de UMP toets verwerpt als $\bar{X} \geq k = \mu_0 + \frac{z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}$.

(e) Er stond een typefout in de opgave: H_a: $\mu \neq 1$ moest zijn H_a: $\mu \neq 0$ (dit is door de meesten opgemerkt). De likelihood ratio is

$$\lambda = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i-0)^2}}{e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i-\hat{\mu})^2}} = \frac{1}{e^{(\sum_{i=1}^n x_i)\bar{x} - \frac{1}{2}n\bar{x}^2}} = e^{-\frac{1}{2}n\bar{x}^2}.$$

De GLR toets verwerpt als dit te klein is, dus als $\bar{x}^2 \geq k$ met k zodanig dat de verwerpingskans onder H_0 gelijk is aan α. Onder H_0 geldt $n\bar{X}^2 \sim \chi^2(1)$, dus de, grootte α, GLR toets verwerpt als

$$\bar{X}^2 \geq \frac{1}{n}\chi^2_{1-\alpha}(1).$$

2. (a)

$$L(\theta) = 2^n \theta^{2n} \prod_{i=1}^n x_i^{-3} I_{[\theta,\infty)}(x_{1:n})$$

Deze functie is positief, en stijgend in θ zolang $\theta \leq x_{1:n}$ (elders nul). De functie heeft een randmaximum bij $x_{1:n}$, dus is de MLE $\hat{\theta} = X_{1:n}$. De pdf van $X_{1:n}$ bepalen: eerst $F_X(x;\theta) = \int_\theta^x f_X(x;\theta)\,\mathrm{d}x = 1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^2$ $(x \geq \theta)$, en vervolgens

$$F_{X_{1:n}}(x;\theta) = 1 - \left(1 - F_{X_{1:n}(x;\theta)}\right)^{2n},$$

en (via differentiëren naar x)

$$f_{X_{1:n}}(x;\theta) = 2n\theta^{2n}s^{-2n-1}, \quad (x > \theta).$$

Is de MSE consistent?

$$P(|X_{1:n} - \theta| < \varepsilon) = F_S(\theta+\varepsilon) = 1 - \left(\frac{\theta}{\theta+\varepsilon}\right)^{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

waarmee is aangetoond dat $X_{1:n} \xrightarrow{P} \theta$.

(b)
$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta) = 2^n\theta^{2n}\prod_{i=1}^{n} x_i^{-3} I_{[\theta,\infty)}(x_{1:n}).$$

Via het factorisatiecriterium valt hieruit af te lezen dat $S = X_{1:n}$ sufficient is. Is S tevens compleet? We kijken of uit de eis $E(u(S)) = 0$ inderdaad volgt dat $u(S)$ nul is (met kans 1)

$$\begin{aligned} E(u(S)) = 2n\theta^{2n}\textstyle\int_\theta^\infty s^{-2n-1}u(s)\,\mathrm{d}s &= 0 \\ \Leftrightarrow \textstyle\int_\theta^\infty s^{-2n-1}u(s)\,\mathrm{d}s &= 0 \\ \Rightarrow -\theta^{-2n-1}u(s) &= 0 \quad (\theta > 0) \quad \text{(Leibniz' regel)} \\ \Leftrightarrow u(s) &= 0 \quad (\theta > 0). \end{aligned}$$

Dus ja, S is tevens 'complete'.

(c) Integratie geeft $E(\hat{\theta}^2) = \frac{n}{n-1}\theta^2$ en $E(\hat{\theta}) = \frac{2n}{2n-1}\theta$, zodat

$$\begin{aligned} \mathrm{MSE}(\hat{\theta}) = E((\theta-\hat{\theta})^2) &= \theta^2 - 2\theta E(\hat{\theta}) + E(\hat{\theta}^2) \\ &= \theta^2 - 2\tfrac{2n}{2n-1}\theta^2 + \tfrac{n}{n-1}\theta^2 \\ &= \theta^2\left(1 - \tfrac{4n}{2n-1} + \tfrac{n}{n-1}\right) \\ &= \theta^2\left(\tfrac{(2n-1)(n-1)-4n(n-1)+n(2n-1)}{(2n-1)(n-1)}\right) \\ &= \theta^2\left(\tfrac{2n^2-3n+1-4n^2+4n+2n^2-n}{(2n-1)(n-1)}\right) = \theta^2\tfrac{1}{(2n-1)(n-1)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{MSE}(\tilde{\theta}) = \mathrm{Var}(\tilde{\theta}) &= E(\tilde{\theta}^2) - \theta^2 \\ &= \left(\tfrac{2n-1}{2n}\right)^2 E(\hat{\theta}^2) - \theta^2 \\ &= \left(\left(\tfrac{2n-1}{2n}\right)^2\tfrac{n}{n-1} - 1\right)\theta^2 \\ &= \tfrac{(2n-1)^2n-(2n)^2(n-1)}{(2n)^2(n-1)}\theta^2 \\ &= \tfrac{4n^3-4n^2+n-4n^3+4n^2}{4n^2(n-1)}\theta^2 = \tfrac{1}{4n(n-1)}\theta^2. \end{aligned}$$

We kunnen concluderen dat $\mathrm{MSE}(\tilde{\theta}) = \frac{1}{4n(n-1)}\theta^2 < \theta^2\frac{1}{(2n-1)(n-1)} = \mathrm{MSE}(\hat{\theta})$.

(d) De gevraagde ondergrens is een functie $\theta_l(S)$ van S zodanig dat $P(\theta_l(S) < \theta) = 0.95$. We weten

$$\begin{aligned} P\left(1 - \left(\tfrac{\theta}{S}\right)^{2n} \le 0.95\right) &= 0.95 \\ \Leftrightarrow P\left(0.05 \le \left(\tfrac{\theta}{S}\right)^{2n}\right) &= 0.95 \\ \Leftrightarrow P\left((0.05)^{\frac{1}{2n}}S \le \theta\right) &= 0.95 \end{aligned}$$

dus is $\theta_l(S) = (0.05)^{\frac{1}{2n}}S$ de gezochte 95% betrouwbaarheidsondergrens van θ.

(e) We bepalen de powerfunctie en stellen die gelijk aan 0.05:

$$\begin{aligned}
\pi(\theta) &= P(X_{1:10} \geq 2.32|\theta) \\
&= 1 - P(S \leq 2.32|\theta) \\
&= F_S(2.32;\theta) \\
&= 1 - \left(1 - \left(\tfrac{\theta}{2.32}\right)^{20}\right) \\
&= \left(\tfrac{\theta}{2.32}\right)^{20} = 0.05,
\end{aligned}$$

met als oplossing $\theta^* = (0.05)^{\frac{1}{20}} \times 2.32 = 2$. De powerfunctie $\pi(\theta)$ is stijgend in θ, met $\pi(2) = 0.05$. De toets is dus een size $\alpha = 0.05$ toets voor H_0: $\theta \leq 2$ tegen H_a: $\theta > 2$.