

## Tentamen Kres 4, 150107, 14:00–17:00

*Antwoorden motiveren; kritieke gebieden en betrouwbaarheidsintervallen zo uitvoerig mogelijk beschrijven. Ieder onderdeel is 10 punten waard. U dient uit te gaan van een steekproef van omvang  $n$  uit de betreffende pdf. Bij het tentamen mag alleen gebruik worden gemaakt van een (zelf mee te nemen) onbeschreven kopie van Appendix B van Bain en Engelhardt!*

1.

$$f_X(x; \theta) = 2\theta x e^{-\theta x^2} I_{[0, \infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

- Geef de complete en sufficient statistic voor  $\theta$  en bepaal de UMVUE voor  $\theta$ .
- Voor welke functie van  $\theta$ , zeg  $\tau(\theta)$ , bestaat er een zuivere schatter waarvan de variantie de CRLB voor zuivere schatters van  $\tau(\theta)$  bereikt?
- Geef een gelijkstaartig (equal tails)  $100\gamma\%$  betrouwbaarheidsinterval voor  $\theta$  gebaseerd op  $\sum x_i^2$ , en bepaal de verwachte lengte van dit interval.
- Toon aan dat deze familie van pdf's een MLR eigenschap bezit en geef de UMP, grootte  $\alpha$ , toets voor  $H_0 : \theta \leq 1$  tegen  $H_a : \theta > 1$ .
- Stel: voor het toetsen van  $H_0 : \theta \leq 1$  tegen  $H_a : \theta > 1$  gebruikt men: verwerp als  $x_{1:n} \leq \sqrt{\frac{-\log(0.9)}{n}}$ . Bereken het onderscheidingsvermogen van deze toets. Wat is de grootte (size) van deze toets?

2.

$$f_X(x; \theta) = 2\theta^2 x^{-3} I_{[\theta, \infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

- Laat zien dat  $X_{1:n} = \min_i X_i$  complete en sufficient is.
- Bepaal de UMVUE voor  $\theta$ .
- Bereken de MME (momentenschatter) voor  $\theta$ . Is deze schatter MSE consistent?
- Laat zien dat  $X_{1:n}/\theta$  een spilfunctie is. Gebruik deze grootheid om een  $100\gamma\%$  gelijkstaartig betrouwbaarheidsinterval op te stellen.
- Geef de GLR, grootte  $\alpha$ , toets voor  $H_0 : \theta = 2$  tegen  $H_a : \theta \neq 2$ .

**Succes!!!**