

Uitwerkingen Tentamen Kres 4, 150107

- (1a) Deze pdf komt uit de REC familie met $t(x) = x^2$, $q(\theta) = -\theta \Rightarrow S := \sum_{i=1}^n X_i^2$ is Complete en Sufficient voor θ . Laet $Y_i = X_i^2$. We bepalen de verdeling van Y : inverse: $X = \sqrt{Y}$, Jacobiaan: $J = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, $f_Y(y) = \frac{2\theta\sqrt{y}}{2\sqrt{y}} e^{-\theta y} I_{[0,\infty)}(y) = \theta e^{-\theta y} I_{[0,\infty)}(y)$, de pdf van de EXP(θ^{-1})-verdeling. $S = \sum_{i=1}^n X_i^2 = \sum_{i=1}^n Y_i \sim \text{GAM}(\theta^{-1}, n)$.

$$\begin{aligned} E[S^k] &= \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty s^{n-1+k} e^{-\theta s} ds \\ &= \frac{\theta^n}{\theta^{n+k}} \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{\theta^n}{\Gamma(n+k)} s^{n-1+k} e^{-\theta s} ds \\ &= \theta^{-k} \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)} \end{aligned}$$

In het bijzonder geldt $E[S^{-1}] = \theta \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n)} = \frac{\theta}{n-1}$ waaruit volgt dat $\frac{n-1}{S}$ UMVUE voor θ is. ($\frac{n-1}{S}$ is zuiver voor θ en een functie van de C&S statistic)

- (1b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(\mathbf{x}, \theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(n \log 2 + n \log \theta - \sum_{i=1}^n \log x_i - \theta \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \\ &= \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ &= n \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right). \end{aligned}$$

Uit opmerking 9.3.II volgt nu dat alleen $\tau(\theta) = \theta^{-1}$ (of een lineaire transformatie daarvan) een zuivere schatter toelaat waarvan de variantie de CRLB voor zuivere schatters van $\tau(\theta)$ bereikt.

- (1c) $S = \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \text{GAM}(\theta^{-1}, n)$, en $2\theta S \sim \chi^2(2n)$.

$$\begin{aligned} \gamma &= P \left[\chi_{\frac{1-\gamma}{2}}^2(2n) < 2\theta S < \chi_{\frac{1+\gamma}{2}}^2(2n) \right] \\ \Leftrightarrow \gamma &= P \left[\frac{\chi_{\frac{1-\gamma}{2}}^2(2n)}{2S} < \theta < \frac{\chi_{\frac{1+\gamma}{2}}^2(2n)}{2S} \right], \end{aligned}$$

waarmee duidelijk is geworden dat het gevraagde gelijkstaartig BI is gegeven door

$$BI = \left(\frac{\chi_{\frac{1-\gamma}{2}}^2(2n)}{2S}, \frac{\chi_{\frac{1+\gamma}{2}}^2(2n)}{2S} \right).$$

De verwachte lengte is het verwachte verschil tussen boven- en ondergrens:

$$E[\ell] = E \left(\left(\chi_{\frac{1+\gamma}{2}}^2(2n) - \chi_{\frac{1-\gamma}{2}}^2(2n) \right) \frac{1}{2S} \right).$$

Nu is $E[S^{-1}] = \frac{\theta}{n-1}$ (zie onderdeel 1a), zodat de verwachte lengte van het BI $\left(\chi_{\frac{1+\gamma}{2}}^2(2n) - \chi_{\frac{1-\gamma}{2}}^2(2n) \right) \frac{1}{2(n-1)}$ is.

(1d) Neem $\theta_2 > \theta_1 > 0$.

$$\frac{f(\mathbf{x}; \theta_2)}{f(\mathbf{x}; \theta_1)} = \frac{2^n \theta_2^n (\prod_{i=1}^n x_i)}{2^n \theta_1^n (\prod_{i=1}^n x_i)} e^{-(\theta_2 - \theta_1) \sum_{i=1}^n x_i^2} = \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^n e^{-(\theta_2 - \theta_1) \sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Dit is een niet-dalende functie van $-\sum_{i=1}^n x_i^2 = -s$ (MLR eigenschap in $-S$). De gevraagde UMP toets verwerpt dus als $-s$ te groot is, ofwel s te klein. Verwerp als $s < k$ met $P[S < k | \theta = 1] = \alpha$. Voor $\theta = 1$ geldt $2 \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(2n)$, dus verwerpen als $\sum_{i=1}^n X_i^2 \leq \frac{1}{2} \chi_\alpha^2(2n)$.

(1e) $F_X(x) = 1 - e^{-\theta x^2}$ voor $x > 0$. $F_{X_{1:n}}(x) = P[X_{1:n} \leq x] = 1 - (F_X(x))^n = 1 - e^{-n\theta x^2}$.

$$\pi(\theta) = P\left[X_{1:n} \leq \sqrt{\frac{-\log(0.9)}{n}}\right] = 1 - e^{-n\theta \frac{-\log(0.9)}{n}} = 1 - (0.9)^\theta. \quad \theta > 0.$$

Dit is een stijgende functie van θ , dus de size is $\alpha = \pi(1) = 0.1$.

(2a) Voor de joint pdf geldt

$$f(\mathbf{x}; \theta) = 2^n \theta^{2n} \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{-3} I_{[\theta, \infty)}(x_{1:n}).$$

Volgens het factorisatiecriterium is $S := X_{1:n}$ dus sufficient. Komt S ook uit een complete familie? We bepalen eerst de verdeling van S . $F_X(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^2$ voor $x \geq \theta$. $F_S(s) = 1 - \left(\frac{\theta}{s}\right)^{2n}$ voor $s > \theta$. Differentiëren geeft: $f_S(s) = 2n\theta^{2n} s^{-2n-1} I_{[\theta, \infty)}(s)$. Nu gaan we kijken of $E[u(S)] = 0$ impliceert dat $u(s) = 0$:

$$\begin{aligned} E[u(S)] &= 0 \\ \Leftrightarrow 2n\theta^{2n} \int_{\theta}^{\infty} s^{-2n-1} u(s) ds &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_{\theta}^{\infty} s^{-2n-1} u(s) ds &= 0, \quad \text{differentiëren naar } \theta \\ \Rightarrow -\theta^{-2n-1} u(\theta) &= 0, \quad (\theta > 0) \Rightarrow u(\theta) = 0, \quad (\theta > 0). \end{aligned}$$

Dus komt S inderdaad uit een complete familie van pdf's, waarmee is aangetoond dat S C&S is voor θ .

(2b)

$$\begin{aligned} E[S] &= 2n\theta^{2n} \int_{\theta}^{\infty} s^{-2n} ds \\ &= \frac{-2n\theta^{2n}}{2n-1} s^{1-2n} \Big|_{s=\theta}^{\infty} \\ &= \frac{2n}{2n-1} \theta, \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $E\left[\frac{2n-1}{2n} S\right] = \theta$, wat aantoont dat $\frac{2n-1}{2n} S$ UMVUE voor θ is. (omdat $\frac{2n-1}{2n} S$ een functie van S is die zuiver is voor θ)

(2c)

$$\begin{aligned} E[X] &= 2\theta^2 \int_{\theta}^{\infty} \frac{x}{x^3} dx \\ &= 2\theta^2 \int_{\theta}^{\infty} x^{-2} dx \\ &= 2\theta^2 (-x^{-1}) \Big|_{x=\theta}^{\infty} \\ &= 2\theta^2 \frac{1}{\theta} = 2\theta. \end{aligned}$$

Dus de MME is $\tilde{X} = \frac{1}{2}\bar{X}$. Voor de MSE consistentie kijken we naar $\text{MSE}(\tilde{X}) = \text{Var}(\tilde{X}) + b^2(\tilde{X})$. De MME is zuiver, immers $E[\tilde{X}] = E[\frac{1}{2}\bar{X}] = \frac{1}{2}E[X] = \theta$, dus is voor MSE consistentie alleen nog het asymptotisch verdwijnen van de variantie nodig. $E[X^2] = 2\theta^2 \int_{\theta}^{\infty} \frac{x^2}{x^3} dx = 2\theta^2 \log x \Big|_{x=\theta}^{\infty}$. Deze integraal divergeert, dus bestaat het tweede moment (en daarmee de variantie) van de MME niet. De MME is dus niet MSE consistent.

(2d) Laat $Y = X/\theta$. Voor de verdeling van Y inverteren we: $X = \theta Y$, $J = \theta$, $f_Y(y) = \theta 2\theta^2 (\theta y)^{-3} I_{[\theta, \infty)}(\theta y) = 2y^{-3} I_{[1, \infty)}(y)$, wat niet van θ afhangt. Hiermee is aangetoond dat Y_1, \dots, Y_n en dus ook $Y_{1:n}$ een verdeling hebben die niet van θ afhangt. Dus $Y_{1:n} = X_{1:n}/\theta$ is een spilfunctie. $F_Y(y) = 1 - y^{-2}$, $y \geq 1$. $F_{Y_{1:n}}(y) = 1 - y^{-2n}$, $y \geq 1$. We lossen op $F_{Y_{1:n}}(y) = \frac{1 \pm \gamma}{2}$. De oplossingen zijn $y = \left(\frac{1 \pm \gamma}{2}\right)^{-\frac{1}{2n}}$, dus

$$\begin{aligned} P\left(\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^{-\frac{1}{2n}} < \frac{X_{1:n}}{\theta} < \left(\frac{1-\gamma}{2}\right)^{-\frac{1}{2n}}\right) &= \gamma \\ P\left(X_{1:n} \left(\frac{1-\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} < \theta < X_{1:n} \left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}\right) &= \gamma \end{aligned}$$

Het gevraagde BI is

$$BI = \left(X_{1:n} \left(\frac{1-\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}, X_{1:n} \left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \right).$$

(2e) We bepalen eerst de ongehinderde MLE. De aannemelijkheidsfunctie is

$$L(\theta) = 2^n \theta^{2n} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{-3} I_{[\theta, \infty)}(x_{1:n}).$$

Dit is maximaal als θ maximaal is onder de voorwaarde $\theta \leq x_{1:n}$, dus als $\theta = x_{1:n}$. $\Rightarrow \hat{\theta} = X_{1:n}$. De gehinderde MLE (onder H_0) is $\theta_0 = 2$. De gegeneraliseerde-

likelihood-ratio toets bestaat eruit te verwerpen als λ te klein is, waarbij

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{f(\mathbf{x}; \theta_0)}{f(\mathbf{x}; \hat{\theta})} = \frac{2^n \theta_0^{2n} (\prod_{i=1}^n x_i)^{-3} I_{[\theta_0, \infty)}(x_{1:n})}{2^n x_{1:n}^{2n} (\prod_{i=1}^n x_i)^{-3} I_{[\hat{\theta}, \infty)}(x_{1:n})} \\ &= \left(\frac{\theta_0}{x_{1:n}} \right)^{2n} I_{[\theta_0, \infty)}(x_{1:n}) \\ &= \left(\frac{2}{x_{1:n}} \right)^{2n} I_{[2, \infty)}(x_{1:n}),\end{aligned}$$

dus verwerp als $x_{1:n} < 2$ (in dat geval weten we zeker dat H_0 niet waar is) of als $x_{1:n} \geq k$. Onder H_0 kan $x_{1:n} < 2$ niet optreden, dus voor een size α moet voldaan zijn aan $P[X_{1:n} \geq k | \theta = 2] = \alpha$. $P_\theta[X_{1:n} \geq k] = 1 - F_{X_{1:n}}(k) = \left(\frac{\theta}{k}\right)^{2n} = \alpha$, ofwel $\theta/k = \alpha^{\frac{1}{2n}}$ met als oplossing $k = 2\alpha^{-\frac{1}{2n}}$. Dus de GLR toets bestaat eruit te verwerpen als $x_{1:n} \leq 2$, of $x_{1:n} \geq 2\alpha^{-\frac{1}{2n}}$.