

Uitwerking tentamen Kres 4, 250607

1.

$$f_X(x; \theta) = \frac{\theta}{x^2} e^{-\theta/x} I_{(0, \infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

- (a) Geef de complete en sufficient statistic voor θ en bepaal de UMVUE voor θ .

De pdf is te schrijven als $f_X(x; \theta) = g(\theta)h(x) \exp(r(\theta)t(x))$ met $t(x)$ is x^{-1} . Het is dus een pdf uit de reguliere exponentiële klasse (REC), en de C&S voor θ is $S := \sum_{i=1}^n t(X_i) = \sum_{i=1}^n X_i^{-1}$. Hoe is S verdeeld? Bepaal eerst de verdeling van $Y = 1/X$. We gaan de CDF methode gebruiken, dus hebben de Cdf van X nodig. $F_X(x) = \int_0^x f_X(s; \theta) ds = 1 - e^{-\theta/x}$, $x > 0$. Nu de Cdf van Y uitdrukken in die van X . $F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[1/X \leq y] = P[X \geq 1/y] = 1 - P[X \leq 1/y] = 1 - e^{-\theta y}$, dus geldt $Y \sim \text{EXP}(\theta^{-1})$, en daarmee $S \sim \text{GAM}(\theta^{-1}, n)$. $f_S(s) = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} s^{n-1} e^{-\theta s}$, $s > 0$. De momenten van S zijn

$$\begin{aligned} E[S^k] &= \int_0^\infty \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} s^{n+k-1} e^{-\theta s} ds \\ &= \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)} \theta^{-k} \int_0^\infty \frac{\theta^{n+k}}{\Gamma(n+k)} s^{n+k-1} e^{-\theta s} ds \\ &= \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)} \theta^{-k}. \end{aligned}$$

In het bijzonder geldt $E[S^{-1}] = \frac{\theta}{n-1}$, dus is $(n-1)S^{-1}$ zuiver voor θ en een functie van S , dus een UMVUE voor θ .

- (b) Bepaal de MLE voor θ . Is deze MSE consistent?

De log-likelihood vergelijking is

$$\frac{n}{\theta} - S = 0$$

met als oplossing $\hat{\theta} = \frac{n}{S}$. MSE consistentie aantonen: Omdat de volgende vergelijking geldt

$$E\left[\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2\right] = \text{bias}^2 + \text{Var}\hat{\theta}$$

volstaat het om aan te tonen dat de bias en variantie naar nul gaan als n naar oneindig gaat. $E[\hat{\theta}] = \frac{n}{n-1}\theta$, dus is de bias $E[\hat{\theta}] - \theta = \left(\frac{n}{n-1} - \frac{n-1}{n-1}\right)\theta = \frac{1}{n-1}\theta \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$. Verder, $E[(\hat{\theta})^2] = E[n^2/S^2] = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}\theta^2$, zodat

$$E[\hat{\theta}^2] - E[\hat{\theta}]^2 = \left[\frac{n^2}{(n-1)(n-2)} - \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

waarmee het gestelde is aangetoond.

- (c) Construeer een $100\gamma\%$ gelijkstaartig betrouwbaarheidsinterval voor θ gebaseerd op de C&S statistic.

Omdat $S \sim \text{GAM}(\theta^{-1}, n)$ geldt $2\theta S \sim \chi^2(2n)$, waaruit volgt

$$\begin{aligned} P\left(\chi_{\frac{1-\gamma}{2}}^2(2n) \leq 2\theta S \leq \chi_{\frac{1+\gamma}{2}}^2(2n)\right) &= \gamma \\ P\left(\frac{\chi_{\frac{1-\gamma}{2}}^2(2n)}{2S} \leq \theta \leq \frac{\chi_{\frac{1+\gamma}{2}}^2(2n)}{2S}\right) &= \gamma. \end{aligned}$$

Het gevraagde BI is

$$\left(\frac{\chi_{\frac{1-\gamma}{2}}^2(2n)}{2S}, \frac{\chi_{\frac{1+\gamma}{2}}^2(2n)}{2S} \right)$$

- (d) Toon aan dat deze familie van dichtheden een MLR eigenschap bezit en geef de UMP, grootte α , toets voor $H_0: \theta \leq 1$ tegen $H_a: \theta > 1$.

Zij $\theta_2 > \theta_1 > 0$, en bepaal

$$\frac{L(\theta_2)}{L(\theta_1)} = \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^n e^{-(\theta_2 - \theta_1)S}.$$

Omdat dit dalend is in S , heeft de familie van pdf's een MLR eigenschap in $-S$. De nulhypothese $H_0: \theta \leq 1$ tegen $H_a: \theta > 1$ moet in dat geval worden verworpen als $S \leq k$, met $P(2\theta S \leq k | \theta = 1) = P(2S \leq k | \theta = 1) = \alpha$. Omdat $2S \sim \chi^2(2n)$ als $\theta = 1$, geldt dit voor $k = \frac{1}{2}\chi_\alpha^2(2n)$.

- (e) Stel, een toets voor $H_0: \theta \geq 3$ tegen $H_a: \theta < 3$ wordt als volgt uitgevoerd: verwerp H_0 als $X_{n:n} < n$. Bereken de grootte (size) en het onderscheidingsvermogen (power) van deze toets.

$$F_{X_{n:n}}(x) = P(X_{n:n} \leq x) = (F_X(x))^n = e^{-\theta n/x}, \quad x > 0$$

De toets verwerpt als $X_{n:n} < n$. De powerfunctie is

$$\pi(\theta) = P(X_{n:n} \leq n) = e^{-\theta}.$$

Dit geeft een onderscheidingsvermogen $e^{-\theta}$ voor $\theta < 3$, en een size $\min_{\theta \in \Omega_0} \pi(\theta) = e^{-3} \simeq 0.05$.

2.

$$f_X(x; \theta) = 4\theta^4 x^{-5} I_{[\theta, \infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

- (a) Laat zien dat $S := X_{1:n}$ sufficient is voor θ . Is S tevens complete?

Sufficiency van S volgt uit het feit dat we de joint pdf kunnen schrijven als

$$f(x_1, \dots, x_n) = 4^n \theta^{4n} I_{[\theta, \infty)}(x_{1:n}) \prod_{i=1}^n x_i^{-5},$$

met het factorisatiecriterium (de term die zowel θ als de data bevat hangt alleen van de data af via $x_{1:n}$). De pdf van S bepalen: $F_X(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^4$, $x \geq \theta$. $S = X_{1:n}$ $F_S(s) = P[S \leq s] = P[X_{1:n} \leq s] = 1 - P[X_{1:n} > s] = 1 - \left(\frac{\theta}{s}\right)^{4n}$, $s > \theta$. Differentiëren geeft $f_S(s) = 4n\theta^{4n}s^{-4n-1}$. Voor completeness moeten we nog aantonen dat $E[u(S)] = 0$ impliceert dat $u(S) = 0$ met kans 1.

$$\begin{aligned} E[u(S)] &= 4n\theta^{4n} \int_{\theta}^{\infty} u(s)s^{-4n-1} ds = 0, \quad \theta > 0 \\ &\Leftrightarrow \int_{\theta}^{\infty} u(s)s^{-4n} ds = 0, \quad \theta > 0 \\ &\Leftrightarrow -u(\theta)\theta^{-4n} = 0, \quad \theta > 0 \\ &\Leftrightarrow -u(\theta) = 0, \quad \theta > 0 \end{aligned}$$

waarbij in de laatste regel m.b.v. de regel van Leibniz is gediifferentieerd. S is dus tevens complete.

- (b) Geef de UMVUE voor θ .

$$\begin{aligned} E[S] &= 4n\theta^{4n} \int_{\theta}^{\infty} s^{-4n} ds \\ &= 4n\theta^{4n} \left[\frac{-1}{4n-1} s^{-4n+1} \right]_{s=\theta}^{\infty} \\ &= \frac{4n}{4n-1} \theta, \end{aligned}$$

waaruit volgt dat $\frac{4n-1}{4n}S$ UMVUE voor θ is.

- (c) Geef een $100\gamma\%$ betrouwbaarheidsondergrens voor θ , gebaseerd op S .

$$\begin{aligned} P\left(1 - \left(\frac{\theta}{S}\right)^{4n} \leq \gamma\right) &= \gamma \\ P\left((1 - \gamma)^{\frac{1}{4n}} S \leq \theta\right) &= \gamma \end{aligned}$$

de gevraagde betrouwbaarheidsondergrens is $(1 - \gamma)^{\frac{1}{4n}} S$.

- (d) Geef de GLR, grootte α , toets voor $H_0: \theta = 1$ tegen $H_a: \theta > 1$.

$H_0: \theta = \theta_0 = 1$, $H_a: \theta > 1$. De likelihood ratio is

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{4^n \theta_0^4 I_{[\theta_0, \infty)}(x_{1:n})}{4^n \hat{\theta}^4 I_{[\hat{\theta}, \infty)}(x_{1:n})} \\ &= \frac{1}{x_{1:n}^4} I_{[\theta_0, \infty)}(x_{1:n}). \end{aligned}$$

Verwerp als $S = X_{1:n} \geq k$ met $P(S \geq k | \theta = 1) = \alpha$. k is de oplossing van $F_S(s | \theta = 1) = 1 - \alpha$, dus van

$$1 - \left(\frac{1}{s}\right)^{4n} = 1 - \alpha,$$

dus $k = \alpha^{-\frac{1}{4n}}$.

- (e) Stel $n \geq 2$. Zijn X_1/X_2 en $X_{1:n}$ stochastisch onafhankelijk? Motiveer uw antwoord duidelijk.

Laat $Y = X/\theta$, met inverse $X = \theta Y$, dan is $f_Y(y) = 4\theta^5 \frac{1}{(\theta y)^5} I_{[1, \infty)}(y) = \frac{4}{y^5} I_{[1, \infty)}(y)$ vrij van θ . Omdat geldt

$$Z := \frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2}$$

is de verdeling van X_1/X_2 ook vrij van θ , en geldt volgens de stelling van Basu dat Z en de C&S statistic $S = X_{1:n}$ s.o. zijn.