Oplossingen tentamen Kres 4, 4 januari 2010, 13:00–16:00

1.

$$f_X(x;\theta) = 2\theta x \mathrm{e}^{-\theta x^2} I_{(0,\infty)}(x), \qquad \theta > 0.$$

(a) De aannemelijkheids- (likelihood-) functie is

$$L(\theta) = 2^n \theta^n \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i^2},$$

en de log-likelihoodfunctie

$$\ell(\theta) = n \ln 2 + n \ln \theta + \sum_{i=1}^n x_i - \theta \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

De log-likelihoodvergelijking is

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ell(\theta) = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0,$$

met als oplossing $\hat{\theta} = n/s$ waarbij $s = \sum_{i=1}^n x_i^2$.
De pdf van $Y = X^2$ (inverse $x = \sqrt{y}$, $J = \frac{2}{\sqrt{y}}$) is $f_Y(y) = \frac{2\theta}{2\sqrt{y}} \sqrt{y} e^{-\theta y} = \theta e^{-\theta y}$, $y > 0$, dus $Y = X^2 \sim \mathrm{EXP}(\theta^{-1})$. Hieruit volgt $S = \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \mathrm{GAM}(\theta^{-1}, n)$.
De MLE $\hat{\theta} = n/S$ is niet zuiver, immers

$$\begin{aligned} E(S^{-1}) &= \int_0^\infty \frac{\theta^n}{(n-1)!} s^{n-2} e^{-\theta s} \, \mathrm{d}s \\ &= \frac{\theta}{n-1} \int_0^\infty \frac{\theta^{n-1}}{(n-2)!} s^{n-2} e^{-\theta s} \, \mathrm{d}s \\ &= \frac{\theta}{n-1}, \end{aligned}$$

zodat $E(\hat{\theta}) = \frac{n}{n-1} \theta$.

(b) De familie van pdf's komt uit de REC-klasse, omdat de pdf te schrijven is als

$$f_X(x;\theta) = c(\theta) h(x) e^{-q(\theta) t(x)}$$

met $c(\theta) = 2\theta$, $h(x) = x$, $q(\theta) = \theta$ en $t(x) = x^2$. S is dus C&S voor θ (Stelling 10.4.2). De UMVUE voor θ is $\theta^* = \frac{n-1}{S}$, met variantie $(n-1)^2 \mathrm{Var}(S^{-1})$. Voor het berekenen van $\mathrm{Var}(S^{-1})$ hebben we nog

$$\begin{aligned} E(S^{-2}) &= \int_0^\infty \frac{\theta^n}{(n-1)!} s^{n-3} e^{-\theta s} \, \mathrm{d}s \\ &= \frac{\theta^2}{(n-1)(n-2)} \int_0^\infty \frac{\theta^{n-2}}{(n-3)!} s^{n-2} e^{-\theta s} \, \mathrm{d}s \\ &= \frac{\theta^2}{(n-1)(n-2)}, \end{aligned}$$

dus

$$\operatorname{Var}\left(\frac{n-1}{S}\right) = (n-1)^2\theta^2\left(\frac{1}{(n-1)(n-2) - \frac{1}{(n-1)^2}}\right) = \theta^2/(n-2).$$

De CRLB voor zuivere schatters van θ is

$$\mathrm{CRLB}(\theta) = \frac{1}{nE\left(\frac{1}{\theta} - X^2\right)^2} = \frac{1}{nE\left(\operatorname{Var}(Y)\right)} = \frac{\theta^2}{n}.$$

De variantie van de UMVUE is dus groter dan CRLB(θ).
Dit kan ook worden geconcludeerd met behulp van Opmerking 9.3.II uit de reader:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ell(\theta) = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right).$$

Alleen $\tau(\theta) = 1/\theta$, of een lineaire functie daarvan, laat dus een zuivere schatter toe waarvan de variantie CRLB($\tau(\theta)$) bereikt.

(c) $S \sim \mathrm{GAM}(\theta^{-1}, n)$, en dus is $2\theta S \sim \chi^2(2n)$ een spilfunctie. Er geldt

$$\begin{aligned} & P\left(\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(2n) < 2\theta S < \chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(2n)\right) = \gamma \\ \Leftrightarrow \quad & P\left(\frac{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(2n)}{2S} < \theta < \frac{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(2n)}{2S}\right) = \gamma \end{aligned}$$

dus het gevraagde betrouwbaarheidsinterval is

$$\left(\frac{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(2n)}{2S}, \frac{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(2n)}{2S}\right).$$

(d) De powerfunctie is

$$\begin{aligned} \pi(\theta) &= P_\theta(X_{1:n} \geq 1/\sqrt{n}) = P_\theta(X_{1:n}^2 \geq 1/n) \\ &= P_\theta(Y_{1:n} \geq 1/n) = 1 - F_Y\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-\theta}. \end{aligned}$$

Dit is een dalende functie van θ, en grootte (de maximale verwerpingskans onder H_0: $\theta \geq 3$) is dus $\pi(3) = e^{-3} \approx 5\%$.

(e) De GLR toets verwerpt als $\lambda = \frac{L(\hat{\theta}_0)}{L(\hat{\theta})}$ te klein is. De gehinderde MLE is $\hat{\theta}_0 = 1$, en de ongehinderde is $\hat{\theta} = n/S = \frac{1}{\bar{y}}$. Dit geeft

$$\lambda = \frac{2^n 1^n e^{-s}}{2^n \left(\frac{1}{\bar{y}}\right)^n e^{-s/y}} = \frac{e^{-s}}{\left(\frac{n}{s}\right)^n e^{-n}} = \left(\frac{s}{n}\right)^n e^{n-s}.$$

Voor n groot geldt de benadering $-2\ln\lambda \sim \chi^2(r)$ waarbij r het aantal restricties is dat H_0 oplegt (1 in dit geval), dus de GLR toets bestaat eruit te verwerpen als $-2\ln\lambda \geq \chi^2_{1-\alpha}(1)$.

2.

$$f_X(x;\theta) = \frac{5}{2}\theta^{-\frac{5}{2}}x^{\frac{3}{2}}I_{[0,\theta]}(x), \qquad \theta > 0.$$

(a) De gezamenlijke pdf is te schrijven als

$$f_X(x;\theta) = g(s;\theta)h(x_1,\ldots,x_n),$$

met $g(s;\theta) = \frac{5}{2}\theta^{-\frac{5}{2}}I_{[0,\theta]}(x_{n:n})$ en $h(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^n x_i^{3/2}$. Volgens het factorisatiecriterium (Stelling 10.2.1) is $S \equiv X_{n:n}$ sufficient. De pdf van S kan m.b.v. de CDF methode worden bepaald. De CDF van X is

$$F_X(x;\theta) = \int_0^x \frac{5}{2}\theta^{-\frac{5}{2}}u^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}u = \left[-\left(\frac{u}{\theta}\right)^{5/2}\right]_{u=0}^x = \left(\frac{x}{\theta}\right)^{5/2},$$

voor $0 \le x \le \theta$.

$$F_S(s;\theta) = P(X_{n:n} \le s) = (F_X(s))^n = \left(\frac{s}{\theta}\right)^{5n/2}.$$

Differenti"eren naar s geeft

$$f_S(s;\theta) = \frac{5n}{2}\theta^{-5n/2}s^{5n/2-1},$$

voor $0 \le s \le \theta$. Er geldt

$$\begin{aligned}
& E(u(S)) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \int_0^\theta \frac{5n}{2}\theta^{-5n/2}s^{5n/2-1}u(s)\,\mathrm{d}s = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \int_0^\theta s^{5n/2-1}u(s)\,\mathrm{d}s = 0. \\
\Rightarrow\ & \theta^{5n/2-1}u(\theta) = 0 \quad \forall\theta > 0.
\end{aligned}$$

Dus $E(u(S)) = 0$ impliceert $u(\theta) = 0$ voor $\theta > 0$, waarmee is aangetoond dat S tevens compleet is.

(b) We berekenen eerst $E(S)$:

$$\begin{aligned}
E(S) &= \int_0^\theta \frac{5n}{2}\theta^{-5n/2}s^{5n/2}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{5n}{2}\theta^{-5n/2}\frac{1}{\frac{5n}{2}+1}\left[s^{5n/2+1}\right]_{s=0}^\theta \\
&= \frac{\frac{5n}{2}}{\frac{5n}{2}+1}\theta = \frac{5n}{5n+2}\theta.
\end{aligned}$$

De gevraagde UMVUE is dus $\frac{5n+2}{5n}X_{n:n}$.

(c) We bepalen eerst de MME. Er geldt

$$E(X) = \int_0^\theta \frac{5}{2}\theta^{-5/2}x^{5/2}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\theta^{-5/2}x^{7/2}/(7/2) = \frac{5}{7}\theta.$$

De MME is de oplossing van $\frac{5}{7}\theta = \bar{X}$, dus $\tilde{\theta} = \frac{7}{5}\bar{X}$. De MME is zuiver, immers $E(\tilde{\theta}) = \frac{7}{5}E(\bar{X}) = \frac{7}{5}E(X) = \theta$. Verder geldt

$$\mathrm{Var}\left(\frac{7}{5}\bar{X}\right) = \frac{49}{25n}\mathrm{Var}X \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

dus is de MME inderdaad MSE consistent. Hierbij is gebruikt dat Var$X$ eindig is, omdat X begrensd is tussen 0 en θ.

Nu de MLE: $L(\theta)$ heeft een randmaximum bij $x_{n:n}$, dus $\hat{\theta} = X_{n:n} = S$. We weten al dat S asymptotisch zuiver is, dus moeten we nog nagaan of de variantie naar nul gaat als n naar oneindig gaat.

$$\begin{aligned} E(S^k) &= \int_0^\theta \frac{5n}{2}\theta^{-5n/2}s^{5n/2-1+k}\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{5n}{2}\theta^{-5n/2}\frac{1}{\frac{5n}{2}+k}\left[s^{5n/2+k}\right]_{s=0}^{\theta} \\ &= \frac{\frac{5n}{2}}{\frac{5n}{2}+k}\theta = \frac{5n}{5n+2k}\theta. \end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}(S) = E(S^2) - (E(S))^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \theta^2 - \theta^2 = 0,$$

waarmee is aangetoond dat de MLE inderdaad MSE consistent is.

(d) Geef een $100\gamma\%$ betrouwbaarheidsondergrens voor θ gebaseerd op S. θ is een schaalparameter, en dus is $W \equiv S/\theta$ een spilfunctie. Immers

$$F_W(w;\theta) = P_\theta(S/\theta \le w) = P_\theta(S \le w\theta) = \left(\frac{w\theta}{\theta}\right)^{5n/2} = w^{5n/2}.$$

Hieruit volgt dat

$$P_\theta(S/\theta \le c) = P_\theta(S/c \le \theta) = c^{5n/2}.$$

S/c is dus de gevraagde ondergrens als $c^{5n/2} = \gamma$, oftewel $c = \gamma^{2/(5n)}$. Deze betrouwbaarheidsondergrens is $S\gamma^{-\frac{2}{5n}}$.

(e) Bescouw, voor $\theta_2 > \theta_1$, de breuk

$$\frac{L(\theta_2)}{L(\theta_1)} = \frac{\theta_2^{-5n/2}}{\theta_1^{-5n/2}}\frac{I_{[0,\theta_2]}(x_{n:n})}{I_{[0,\theta_1]}(x_{n:n})} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{5n/2} \times \begin{cases} 1 & \text{als } x_{n:n} \le \theta_1, \\ \infty & \text{als } x_{n:n} > \theta_1. \end{cases}$$

Deze familie van pdf's bezit dus de MLR eigenschap in $t(X_1,\ldots,X_n) = X_{n:n}$. De UMP toets voor H_0: $\theta \le 1$ tegen H_a: $\theta > 1$ bestaat eruit te verwerpen als $x_{n:n}$ te groot is, dus als $x_{n:n} > k$, met k zodanig dat $P_{\theta=1}(X_{n:n} \ge k) = \alpha$, oftewel $P_{\theta=1}(X_{n:n} \le k) = 1-\alpha$. Omdat $F_S(s;1) = s^{5n/2}$, is k de oplossing van $s^{5n/2} = 1-\alpha$ naar s, ofwel $k = (1-\alpha)^{2/(5n)}$.