

## Tentamen Kres 4, 310103, 9.30–12.30

*Antwoorden motiveren; kritieke gebieden en betrouwbaarheidsintervallen zo uitvoerig mogelijk beschrijven. Ieder onderdeel is 10 punten waard. Bij het tentamen mag alleen gebruik worden gemaakt van een (zelf mee te nemen) onbeschreven kopie van Appendix B van Bain en Engelhardt!*

1. Gegeven is een steekproef  $X_1, \dots, X_n$  uit een  $\text{UNIF}(-\theta, \theta)$  verdeling met  $\theta > 0$ .  
Notatie:  $X_{1:n}$  en  $X_{n:n}$  zijn het kleinste resp. grootste element van de steekproef.

- (a) Toon met behulp van indicatorfuncties aan dat

$$S = \{X_{1:n}, X_{n:n}\}$$

sufficient is voor  $\theta$ . Leg uit waarom  $S$  *niet* compleet is.

- (b) Toon aan dat de MLE  $\hat{\theta} = \max(|X_{1:n}|, |X_{n:n}|)$  van  $\theta$  eveneens sufficient is. Laat zien dat de MLE *wel* compleet is.

[Hint: voor het bepalen van de pdf van de MLE kan de volgende transformatie van pas komen:  $Y_i = |X_i|$ .]

- (c) Bereken de Cramér-Rao ondergrens (CRLB) voor zuivere schatters van  $\theta$ . Bereikt de UMVUE voor  $\theta$  deze ondergrens?  
(d) Bepaal de UMVUE van  $\theta^{-1}$ .  
(e) Bepaal een betrouwbaarheidsbovengrens  $b$ , gebaseerd op de MLE,  $\hat{\theta}$ , zodanig dat  $(\hat{\theta}, b)$  een 95% BI is voor  $\theta$ .

2. Zij  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) onafhankelijke en identiek verdeelde stochasten met onderstaande dichtheid

$$f(x; \theta) = \frac{3}{\theta x^4} \exp\left(-\frac{1}{\theta x^3}\right) I_{(0, \infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

- (a) Bepaal de MLE van  $\theta$ . Is deze schatter een UMVUE?  
(b) Geef een  $(1 - \alpha) \cdot 100\%$  gelijkstaartig betrouwbaarheidsinterval voor  $\theta$  op basis van

$$\frac{\hat{\theta}}{\theta}.$$

[Hint: wat is de verdeling van  $Y_i = 1/X_i^3$ ?]

- (c) Laat zien dat deze familie van pdf's een MLR eigenschap heeft en geef de UMP toets voor  $H_0 : \theta \geq \theta_0$  versus  $H_a : \theta < \theta_0$  bij een significantie niveau ("size") van  $\alpha$ .  
(d) Schets de powerfuncties van de toets uit (c) voor  $n = 10$  en  $n = 1000$  in het geval  $\alpha = 0,1$ . Benoem de assen en geef aan welke curves corresponderen met welke gevallen.  
(e) Toets de hypothese  $H_0 : \theta = 2$  versus  $H_a : \theta < 2$  met behulp van de GLR methode voor een size  $\alpha = 0,1$  indien  $\hat{\theta} = 1$  en  $n = 10$ . Gebruik hierbij de asymptotische benadering  $-2 \log(\lambda) \sim \chi^2(1)$ . Verder geldt dat  $\chi_{0,1}^2(1) = 0,02$  en  $\chi_{0,9}^2(1) = 3,84$ .

**Succes!!!**