

Universiteit van Amsterdam, afdeling Kwantitatieve economie, sectie Actuarieat,
W.J. Willemse

Dit tentamen bestaat uit drie opgaven. Het aantal punten per opgave is tussen haakjes gegeven na elke deelopgave (op een totaal van 100 punten). De totale behaalde score wordt gedeeld door 10 en afgerond op 0,5 punt om tot een cijfer te komen. Bij het tentamen mag een formuleblad worden gebruikt, mits verder onbeschreven, versie september 1999 of februari 2004.

VEEL SUCCES!

Opgave 1 (30 punten)

De stochastische contante waarde van een m jaar uitgestelde levenslange continue annuïteit is gedefinieerd door

$$Y = \int_0^{T(x)} e^{-\delta t} dt$$

waarbij $T(x)$ de stochastische toekomstige levensduur is van de verzekerde.

- a. Bewijs op basis van bovenstaande stochast dat

$$\text{Var}[Y] = \frac{1}{\delta^2} \left(\delta^* \bar{A}_x - \bar{A}_x^2 \right)$$

waarbij $\delta^* = 2\delta$. (20)

- b. Wat gebeurt er met de variantie als de interestintensiteit δ stijgt? Wordt deze hoger of lager? Verklaar, zonder te rekenen, in kwalitatieve termen hoe dat komt. (10)

Opgave 2 (30 punten)

Voor een verzekering die op tijdstip 0 wordt gesloten op het leven van een x -jarige wordt de netto voorziening op het tijdstip t genoteerd door V_{x+t} ; in samenhang daarmee wordt een infinitesimale spaarpremie

$$dPS_t = dV_{x+t} - \delta V_{x+t} dt$$

en een éénjarige (gedisconteerde) spaarpremie

$$ps_m = e^{-\delta} V_{x+m+1} - V_{x+m}$$

gedefinieerd ($0 \leq t \leq n$, $m = 0, 1, \dots, n - 1$, met n de duur van de verzekering).

Overeenkomstig de definitie van de infinitesimale spaarpremie dPS_t wordt een infinitesimale actuariële spaarpremie, notatie $dPSA_t$, gedefinieerd door

$$dPSA_t = dPS_t - \mu_{x+t} V_{x+t} dt$$

- a. Voor ieder tijdstip t , $0 \leq t \leq n$, is de naar tijdstip t met interest opgerente waarde van de infinitesimale spaarpremies gelijk aan V_{x+t} , dus

$$V_{x+t} = \int_0^t e^{\delta(t-s)} dPS_s$$

Toon deze gelijkheid aan. (10)

- b. Definieer zelf de eenjarig actuariel gediscoteerde spaarpremie psa_m ($m = 0, 1, \dots, n-1$) in samenhang met de gegeven definitie van de infinitesimale actuariële spaarpremie. (5)
- c. Geef de naar tijdstip t actuariel opgerente waarde van de infinitesimale actuariële spaarpremies en toon aan dat deze waarde eveneens gelijk is aan V_{x+t} . (5)
- d. Toon met behulp van a. en b. de volgende relatie aan

$$\int_0^t e^{-\delta s} (1 - {}_s p_x) dPS_s - \int_0^t e^{-\delta s} V_{x+s} d_s p_x = e^{-\delta t} (1 - {}_t p_x) V_{x+t} \quad (10)$$

Opgave 3 (40 punten)

Op het tijdstip 0 sluit (x) de volgende verzekering:

- Bij overlijden op enig tijdstip voor tijdstip n , n geheel, wordt een m -jarige vaste prenumerando rente 1 uitgekeerd, waarvan de betalingen op tijdstip n ingaan;
- Bij overlijden na tijdstip n en voor $n + m$, m geheel, wordt elk jaar een rente groot 1 uitgekeerd, waarbij de eerste uitkering geschiedt aan het eind van het overlijdensjaar en de laatste uitkering op tijdstip $n + m - 1$;
- Indien verzekerde nog in leven is op tijdstip $n + m$ dan worden alle brutopremies PB terugbetaald.

De prenumerando gelijkblijvende brutopremie wordt betaald bij in leven zijn van (x) gedurende ten hoogste n jaar. De eerste kosten bedragen α ; de incassokosten bedragen β per eenheid brutopremie; de administratiekosten bedragen γ per jaar, zolang de verzekering duurt en de verzekerde leeft.

- a. Geef voor de gehele verzekeringsduur de uitkering- en betalingsfunctie en de salderingsfunctie van deze verzekering op tijdstip t waarbij t niet geheel hoeft te zijn. (10)
- b. Bewijs bij geldigheid van het equivalentiebeginsel dat de netto koopsom KN gelijk is aan

$$e^{-\delta n} \ddot{a}_{\overline{m}|} - {}_n E_x \ddot{a}_{\overline{x+n:\overline{m}|}} + {}_{n+m} E_x nPB \quad (10)$$

- c. Bepaal vervolgens PB en vereenvoudig de uitdrukking hiervoor zoveel mogelijk. (7)
- d. Geef de integraalformule voor de prospectieve voorziening volgens de Höcknermethode voor een geheel tijdstip k tijdens de verzekeringsduur. (7)
- e. Geef in geval van reservering van de Höcknermethode aan wat jaarlijks beschikbaar is voor kostendekking. (6)