Tentamen Levenactuariaat 2 – donderdag 2 april 2009

Vermeld op alle in te leveren papieren uw naam en collegekaartnummer.

Bij elke opgave en bij elk onderdeel van de opgave is aangegeven hoeveel punten er mee behaald kunnen worden. U kunt in totaal maximaal 100 punten behalen. Uw cijfer is het behaalde aantal punten gedeeld door 10.

Het is toegestaan het formuleblad te gebruiken dat gepubliceerd is op de Blackboard site van dit vak (versie maart 2009).

Veel succes.

Opgave 1 (15 punten)

Stel dat de resterende levensduur $T(x)$ van een x-jarige een aangepaste *de Moivre* verdeling heeft. De sterfte-intensiteit is dan gelijk aan

$$\mu_{T(x)}(t) = \frac{\alpha}{\omega - x - t}, \text{ voor } 0 \le t < 100 - x.$$

Veronderstel voor de volgende vragen dat ω = 100 en α = 2.

a. Bepaal de kans dat $\tilde{T}$ = 25 voor een 50-jarige. (7)

Stel dat de waarden van de overlevingsfunctie voor een 50-jarige alleen bekend zijn voor t = 0, 10, 20, …, 50, en dat de tussenliggende waarden geïnterpoleerd worden.

b. Bepaal de afwijking ten opzichte van de exacte waarde indien de kans 24 ≤ T ≤ 28 bepaald wordt aan de hand van de standaardbenadering. (8)

Opgave 2 (20 punten)

Voor de berekening van een nettokoopsom voor een 3-jarige kapitaalverzekering bij overlijden voor een 65-jarige wordt gebruik gemaakt van de volgende eenjarige sterftekansen: q_{65} = 0,1, q_{66} = 0,1 en q_{67} = 0,2. De disconteringsrente is i_0 = 0,03, i_1 = 0,04, i_2 = 0,05. De verzekering geeft een uitkering van 100 aan het eind van het jaar van overlijden.

a. Bereken de verwachtingswaarde en de variantie van de stochastische contante waarde Z van deze verzekering. (15)

De verzekeraar berekent de brutokoopsom door $0{,}02\sqrt{\mathrm{var}[Z]}$ bij de nettokoopsom op te tellen.

b. Hoeveel contracten moet de verzekeraar naar verwachting verkopen zodat met een waarschijnlijkheid van 5% de koopsommen niet voldoende zijn om de uitkeringen te dekken? Maak hierbij gebruik van de standaardbenadering, met $\Phi^{-1}(1 - 0{,}05) = 1{,}645$.

Opgave 3 (20 punten)

Een verzekeringscontract geeft recht op een uitkering van één eenheid direct na overlijden en een even grote uitkering na tien jaar indien de verzekerde dan in leven is. De premiebetaling van dit contract is gelijkblijvend en continu met een duur van tien jaar. Er wordt met 10% administratiekosten berekend. De sterfte-intensiteit is constant en gelijk aan $\mu = 0{,}02$. De rente-intensiteit is $\delta = 0{,}04$.

a. Bewijs dat voor deze verzekering het stochastisch verlies gedefinieerd is door

$$ {}_tL = \left(1 + \frac{\pi}{\delta}\right) e^{-\delta(T \circ t)} - \frac{\pi}{\delta} $$

met π de brutopremie. (5)

b. Bewijs vervolgens dat

$$ \Pr\left[{}_0L \le u\right] = s_T\left(-\frac{1}{\delta}\ln\left(\frac{\delta u + \pi}{\delta + \pi}\right)\right), \text{ voor } -\frac{\pi}{\delta} + \left(1 + \frac{\pi}{\delta}\right) e^{-\delta n} \le u < 1, $$

waarbij n de duur van de verzekering is. (5)

c. Bepaal de kans dat het verlies groter is dan -1/5 en kleiner of gelijk aan 1/2. (10)

Opgave 4 (20 punten)

Veronderstel twee doodsoorzaken T_1 en T_2, waarbij $T = \min(T_1, T_2)$. De samengestelde dichtheid is

$$ f_{T_1,T_2}(s,t) = \begin{cases} 6(s-t)^2 & 0 \le s \le 1,\ 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases} $$

a. Bepaal de dichtheden van de afzonderlijke doodsoorzaken. (5)

b. Bepaal de overlevingsfunctie van de gehele populatie $s_T(t)$. (5)

Stel dat wordt uitgegaan van twee identieke onafhankelijke doodsoorzaken.

c. Bepaal op basis van de overlevingsfunctie van de gehele populatie de sterfte-intensiteit van elke doodsoorzaak. (5)

d. Hoe heet het fenomeen dat er twee verschillende modellen gevonden kunnen worden voor dezelfde verzameling waargenomen gegevens. (5)

Opgave 5 (25 punten)

Gegeven een discreet niet-stationair Markov proces met de volgende overgangsmatrices.

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ voor } k > 0,$$

met toestanden ‘actief’, ‘arbeidsongeschikt’ en ‘overleden’.

a. Geef een uitdrukking op basis van $\mathbf{P}_0$ en $\mathbf{P}_k$ voor de matrix met de gemiddelde duur (vanaf tijdstip 0) in toestand j gegeven dat het proces start in toestand i. (5)

b. Bepaal de gemiddelde duur van elke toestand gegeven dat het proces in die toestand start. (10)

c. Bereken de contante waarde van een 3-jarig verzekeringscontract dat recht geeft op een uitkering aan het eind van het jaar bij een overgang in dat jaar naar toestand ‘arbeidsongeschikt’, uitgaande dat een verzekerde zich bij aanvang in toestand ‘actief’ bevindt. (10)

FORMULEBLAD LEVENACTUARIAAT 2, CURSUSJAAR 2007-2008

Versie maart 2009

Hoofdstuk 14

Variabele $\tilde{T}$ geeft het discrete overlijdensmoment.

Formules voor de contante waarde van kapitaal bij overlijden en annuïteiten

$$A_{\tilde{T}}(\mathbf{b};v)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k v(k+1)\tilde{f}(k+1),\quad \bar{A}_T(b;v)=\int_0^{\infty} b(t)v(t)f(t)\mathrm{d}t \qquad (14.1 \text{ en } 14.3)$$

$$\ddot{a}_{\tilde{T}}(\mathbf{c};v)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k v(k)s(k),\quad \bar{a}_T(c;v)=\int_0^{\infty} c(t)v(t)s(t)\mathrm{d}t \qquad (14.8 \text{ en } 14.15)$$

$$\ddot{a}_{\tilde{T}}(\mathbf{c};v)=\sum_{k=1}^{\infty} g(k)\tilde{f}(k), \text{ met } g(k)=\sum_{n=0}^{k-1} c_n v(n) \qquad (14.6)$$

$$\bar{a}_T(c;v)=\int_0^{\infty} \bar{g}(t)f(t)\mathrm{d}t, \text{ met } \bar{g}(t)=\int_0^{t} c(r)v(r)\mathrm{d}r \qquad (14.13)$$

Variantie van het prospectieve verlies (formule van Hattendorf)

$$\mathrm{var}[{}_rL]=\frac{1}{s(r)}\sum_{k=0}^{\infty} v(r,r+k+1)^2\eta_{r+k}^2 s(r+k+1)\lambda(r+k+1) \qquad (14.23)$$

Hoofdstuk 15

Varianties van het prospectieve verlies van een levenslang kapitaal bij overlijden tegen gelijkblijvende premie π.

$$\mathrm{var}[{}_tL]=(1+\pi/\delta)^2\,\mathrm{var}\left[v^{T\alpha t}\right] \qquad (15.6)$$

$$\mathrm{var}[{}_kL]=(1+\pi/d)^2\,\mathrm{var}\left[v^{\tilde{T}\alpha k}\right] \qquad (15.6')$$

Hoofdstuk 16

De samengestelde verdelingsfunctie (T, J)

$$F_{T,J}(t,j)=\int_0^{t}\sigma_j(u)\mathrm{d}u, \text{ met } \sigma_j(u)=-\frac{d}{dt_j}s(t_1,t_2,\ldots,t_m)\Big|_{t_1=t_2=\ldots=t_m=u} \qquad (16.7)$$

$$F_{T,J}(t,j)=\int_0^{t} s_T(u)\mu_j(u)\mathrm{d}u, \text{ voor onafhankelijke } T_i \qquad (16.16)$$

De discrete sterfte-intensiteit van (T, J)

$$\lambda_{\tilde{T},J}(k+1,j)=\int_0^{1}\prod_{i\neq j}\frac{s_i(k+r)}{s_i(k)}\frac{f_j(k+r)}{s_j(k)}\mathrm{d}r \qquad (16.18)$$

Hoofdstuk 18

Kapitaal bij overlijden

$$APV=\sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(i,j)}v(k+1)q_k^a(i,j), \text{ met } q_k^a(i,j)=[\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\ldots\mathbf{P}_{k-1}](a,i)\times\mathbf{P}_k(i,j) \qquad (18.11)$$

Annuïteiten

$$APV=\sum_{k=0}^{\infty} c_k^i v(k)\mathbf{P}^k(a,i) \qquad (18.12)$$