Uitwerking tentamen 2 april 2009

Opgave 1

a. Gevraagd wordt de kans om te overlijden in (24, 25]. De overlevingsfunctie is $S_T(t) = \left(1 - \frac{t}{100-50}\right)^2$, dus de gevraagde kans is $\Pr\left[\tilde{T} = 25\right] = \left(1 - \frac{24}{50}\right)^2 - \left(1 - \frac{25}{50}\right)^2 = 0{,}0204$.

b. Exact: $\Pr\left[24 \le T \le 28\right] = \left(1 - \frac{24}{50}\right)^2 - \left(1 - \frac{28}{50}\right)^2 = 0{,}0768$

Op basis van interpolatie:

$$\Pr\left[24 \le T \le 28\right] = s_T(24) - s_T(28) = \tfrac{6}{10}\left(1 - \tfrac{20}{50}\right)^2 + \tfrac{4}{10}\left(1 - \tfrac{30}{50}\right)^2 - \left(\tfrac{2}{10}\left(1 - \tfrac{20}{50}\right)^2 + \tfrac{8}{10}\left(1 - \tfrac{30}{50}\right)^2\right) = 0{,}08$$

De afwijking is dus 0,0032.

Opgave 2

a.

$$E[Z] = \frac{100}{1{,}03} * 0{,}1 + \frac{100}{(1{,}03)(1{,}04)} * 0{,}9 * 0{,}1 + \frac{100}{(1{,}03)(1{,}04)(1{,}05)} * 0{,}9^2 * 0{,}2 = 32{,}51.$$

$$E\left[Z^2\right] = \left(\frac{100}{1{,}03}\right)^2 * 0{,}1 + \left(\frac{100}{(1{,}03)(1{,}04)}\right)^2 * 0{,}9 * 0{,}1 + \left(\frac{100}{(1{,}03)(1{,}04)(1{,}05)}\right)^2 * 0{,}9^2 * 0{,}2 = 3007{,}48$$

$$\operatorname{var}[Z] = 1950{,}34$$

b. Er moet gelden $1{,}645\sqrt{\frac{\operatorname{var}[Z]}{N}} = 0{,}02\sqrt{\operatorname{var}[Z]}$. Met var[Z] = 1950,34 vinden we N = 6765 polissen.

Opgave 3

a. Zie pagina 208 van het boek.

b. Zie pagina 211 van het boek.

c. $E[Z] = 0{,}69921$, $E[Y] = 7{,}5198$. Daarmee vinden we

$$\pi_{netto} = \frac{0{,}69921}{7{,}5198} = 0{,}092983 \text{ en } \pi_{bruto} = 0{,}092983 * 1{,}1 = 0{,}10228.$$

$$\Pr\left[L < -\frac{1}{5}\right] = 0, \text{ aangezien } -\frac{\pi}{\delta} + \left(1 + \frac{\pi}{\delta}\right)v^N = -0{,}17267 > -0{,}2.$$

$$\Pr\left[L < \frac{1}{2}\right] = s_T\left(-\frac{1}{0{,}04}\ln\left(\frac{0{,}04 * 0{,}5 + 0{,}10228}{0{,}04 + 0{,}10228}\right)\right) = 0{,}92706$$

Opgave 4

a. $f_{T_1}(s)=\int_0^1 6(s-t)^2 dt = 2s^3-2(s-1)^3$ en $f_{T_1}(t)=\int_0^1 6(s-t)^2 dt = 2t^3+2(1-t)^3$

b. $F_{T,J}(t,1)=\int_0^t\int_s^1 6(s-t)^2 dtds = 1-\frac{(1-t)^4}{2}$. Vanwege symmetrie geldt dan $F_{T,J}(t,2)=1-\frac{(1-t)^4}{2}$ en dus $s_T(t)=(1-t)^4$.

c. De sterfte-intensiteit van $s_T(t)=(1-t)^4$ is $\mu_T(t)=\frac{4}{1-t}$, dus $\mu_{T_1}(t)=\frac{2}{1-t}$ en $\mu_{T_2}(t)=\frac{2}{1-t}$.

d. Niet-identificeerbaarheid

Opgave 5

a. Als **D** de matrix met de duur is dan geldt

$$\mathbf{D}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}^n=\mathbf{I}+\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}^n=\mathbf{I}+\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k^{n-1}=\mathbf{I}+\mathbf{P}_0\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}_k^n$$

b. Daartoe evalueren we bovenstaande formule

$$\mathbf{D}=\mathbf{I}+\mathbf{Q}_0\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{Q}_k^n=\mathbf{I}+\mathbf{Q}_0(\mathbf{I}-\mathbf{Q}_k)^{-1}$$ met $\mathbf{Q}_0=\begin{bmatrix}\frac{9}{10} & 0\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$ en $\mathbf{Q}_k=\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{1}{10}\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$. We vinden $\mathbf{D}=\begin{bmatrix}10 & \frac{6}{5}\\ 10 & \frac{8}{3}\end{bmatrix}$, dus de duur in toestand ‘actief’ is gemiddeld 10 en in toestand ‘arbeidsongeschikt’ 8/3.

c. $APV = v*0+v^2\frac{9}{10}+v^3\frac{9}{125}$. (De rente was niet gegeven, het antwoord is goedgekeurd als q_0^a, q_1^a en q_2^a goed waren bepaald).