1. Gegeven een LP probleem

(P) max $z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$ (= **c x**)

waarvoor het gebied van toegelaten oplossingen T wordt gegeven als de verzameling punten op het afknotingsvlak van een symmetrisch afgeknotte kubus zoals afgebeeld in de onderstaande figuur.

a) Hier varieren we de parametervector van kriteriumcoefficienten **c** in (P). Geef uw oordeel over de juistheid van de volgende uitspraken in termen van WAAR of ONWAAR (lees nauwkeurig elk woord telt!)

i. Er bestaat precies één **c** zó dat het punt **x** = (5/6,5/6,5/6) optimaal is.
ii. Voor *ieder* hoekpunt $h \in \{I,J,H\}$ is er *precies* één $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ waarvoor $\mathbf{x}^*=h$ de enige optimale oplossing is.
iii.Voor *iedere* criteriumfunctie $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ is één or meer van de hoekpunten $h \in \{I,J,H\}$ optimaal.

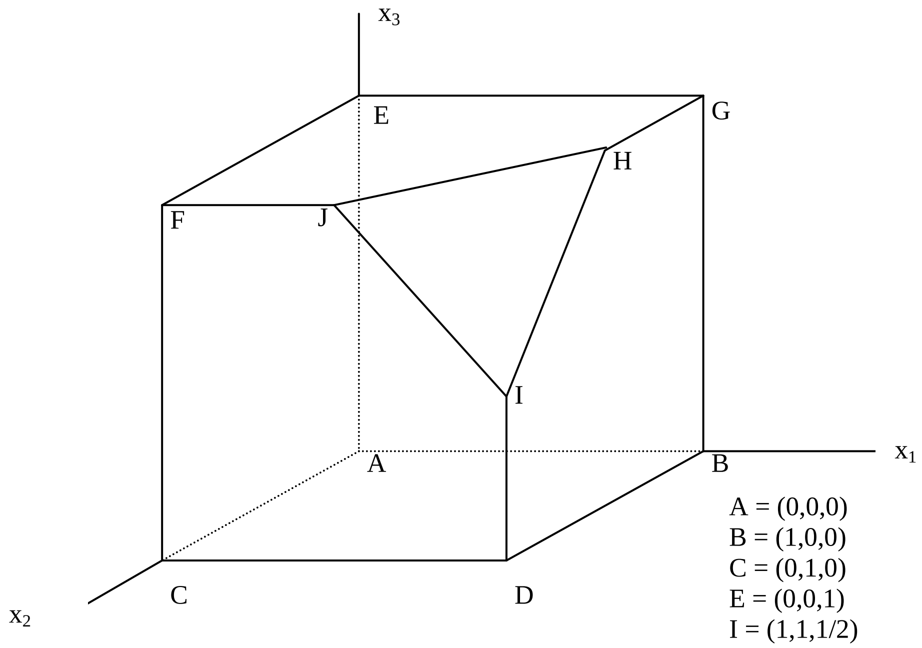
Voor de vervolgvragen beschouwen we uitsluitend het probleem (P) met in de criteriumfunctie: **c** = (1,2,3)

b) Formuleer het lineaire programmeringsprobleem (P) mathematisch met een volledig stelsel van voorwaarden.

c) Formuleer de duale probleem van (P).

d) Welke extra variabelen (naast z, x_1,x_2,x_3) zou de reguliere simplexmethode invoeren in het model zoals geformuleerd in b). Zijn er hieronder zogenaamde artificials?

e) Via welke hoekpunten bereikt de simplaex methode welke optimale oplossing
Formuleer het eerste simplextableau en doe daarin **één** simplexstap (dus tot en met het tweede tableau)



A = (0,0,0)
B = (1,0,0)
C = (0,1,0)
E = (0,0,1)
I = (1,1,1/2)
J = (1/2,1,1)
H=(1,1/2,1)

Opgave 2. There are six major towns in one area of the Midlands. Currently each town has a fire station, but management has decided to rationalize[1] the location of the stations, in such a way, that each town is still within 20 minutes driving time of a fire station that remains open.

a) As data d_{ij} the driving times between town i and town j are given. Formulate[2] as an integer linear program the problem of deciding which fire stations must remain open, but do not solve it. The only objective is a minimum number of open stations (while each town being in reach within 20 minutes from an open fire station).

$j\rightarrow$	d_{ij}	A	B	C	D	E	F
$i\downarrow$	A	0	14	19	16	21	25
	B	14	0	30	40	12	15
	C	19	30	0	18	16	25
	D	16	40	18	0	21	30
	E	21	12	16	21	0	19
	F	25	15	25	30	19	0

Opgave 3 The outcome of the model of a) is that fire stations are only maintained in towns A and E. Assume for the new situation that on new years eve two fires break out in each of the towns B, C and D (6 fires in total). The problem is here to assign each of these fires to either the station in A or the station in E, in such a way that the total driving time to the fires is minimal. Each fire requires a single drive with separate equipment from one of the stations, while each station has equipment for at most 3 simultaneous fires.

Formuleer dit probleem mathematisch als een transportprobleem, schrijf daarbij de criteriumfunctie en de voorwaarden volledig uit. Los daarna het probleem op met het transportalgoritme.

Opgave 4
Een vliegtuig kan 4 soorten vracht gaan vervoeren, van iedere soort worden er 2 eenheden aangeboden. Het gewicht, het volume en de vervoerswinst per te vervoeren eenheid van elke soort zijn hieronder weergegeven. Het vliegtuig kan hooguit 11 ton vervoeren en heeft een volume van 300 m^3.

Soort n	**1**	**2**	**3**	**4**
Winst w_n	18	25	30	20
Gewicht g_n	2	4	5	3
Volume v_n	40	50	80	30

a) Formuleer het beladingsprobleem als een integer lineair programmeringsprobleem ter optimalisatie van de totale winst. Gebruik daarbij zo min mogelijk voorwaarden (elimineer dus alle voorwaarden die bij nader inzien overbodig zijn).

b) Formuleer hetzelfde probleem nu zorgvuldig als een N-staps Dynamisch Programmeringsprobleem. D.w.z. definieer daarvoor nauwkeurig: het aantal fasen N, de toestand, de beslissingen, de direkte opbrenstfunctie en de recursieve optimaliteitsvergelijking.

c) Bereken de optimale belading van het vliegtuig en de bijbehorende opbrengst met dynamische programmering.

---

[1]Een veel gebruikt eufemisme: rationaliseren=bezuinigen

[2] De formulering dient overdraagbaar te zijn naar een soortgelijk probleem met meer steden, gebruik daarom de parameters d_{ij} en indices i en j. (Een MPL-formulering wordt niet op prijs gesteld, het gaat om een gewone mathematische formulering)

Opgave 2. *(dit opgaveblad met uitwerking ingevuld terug inleveren)*

Beschouw het probleem

P: max z = $1\,x_1 - 1\,x_2 + 2\,x_3$ D:

onder
$$\begin{aligned} 2\,x_1 - 2\,x_2 + 3\,x_3 &= 5 \\ 1\,x_1 + 1\,x_2 - 1\,x_3 &\leq 3 \\ 1\,x_1 - 1\,x_2 + 1\,x_3 &\leq 2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \mathbf{x_3} &\in \mathbf{R} \end{aligned}$$

a) Formuleer ernaast het duale probleem van P.

b) De simplexmethode heeft variabelen x_4, x_5, x_6 toegevoegd, aan respectievelijk de 1e, 2e en 3e voorwaarde. Het optimale tableau is hieronder deels gegeven. Vul het aan tot een volledig tableau.

										✓voor c	
		z					x_4	x_5	x_6		sol
c_B	z	1									
	x_2	0					1	3	0		
	x_6	0					0	1	1		
	x^+_3	0					1	2	0		

b) Wat is de schaduwprijs van voorwaarde 1? Bereken het interval voor b_1^{new} waarbinnen ze exact geldig is.

Antwoorden:

c) We voegen als extra voorwaarde toe: $6x_1 + x_2 \geq 15$. Heroptimaliseer hiervoor via de duale simplexmethode.

		z					x_4	x_5	x_6		sol
c_B	z	1									
	x_2	0					1	3	0		
	x_6	0					0	1	1		
	x^+_3	0					1	2	0		

eventuele extra werkruimte voor a of b:

eventuele extra werkruimte voor c:

eventuele extra werkruimte voor d:

DE ANTWOORDEN VAN Tentamen OR IA

Opgave 1. *Kubus-LP*

a) Formuleer (P) als LP met een compleet stelsel van voorwaarden.

max $z=x_1+2x_2+3x_3$

$x_i \leq 1$ (i=1,2,3)

$x_1+x_2+x_3 = 2.5$

$x_i \geq 0$ (i=1,2,3)

3punten

b) MIN Z=y1+y2+y3+2.5y4 onder y1+y4≥1, y2+y4≥2, y3+y4≥3; y1,y2,y3≥0 en y4∈R

2punten

c)Welke extra variabelen gebruikt de reguliere simplex; zijn er hieronder zogenaamde artificials?

MAX $z=x_1+2x_2+3x_3-Mx_7$ $x_1+x_4 = 1$; $x_2+x_5 = 1$; $x_3+x_6 = 1$ $x_1+x_2+x_3 +x_7 = 2.5$

slack variabelen x_4 t/m $x_6 \geq 0$, artificial $x_7 \geq 0$

2 punten

		z	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7		sol
c_B	z	1	-M-1	-M-2	-M-3	0	0	0	0		-2.5M
0	x4		1			1					1
0	x5			1			1				1
0	x6				1			1			1
-M **1punt**	x7		1	1	1				1		2.5
c_B	z	1	-M-1	-M-2	0	0	0	0	0		-1.5M
0	x4		1			1					1
0	x5			1			1				1
0	x3		-1	-1	1			1			1
-M **1 punt**	x7		1	1	0			-1	1		1.5

d) **3 punten**

Met meetkundige gevoeligheidsanalyse de optimale duale oplossing.

$x_1 \leq 1$; $y_1=dz^*/db_1$: Bij $b_1=1+\varepsilon$ geldt x^*_{new} = (1/2, 1, 1) met z*-toename 0 $\rightarrow y_1=0$

$x_2 \leq 1$; $y_2=dz^*/db_2$: Bij $b_2=1+\varepsilon$ geldt x^*_{new} = (1/2-ε, 1+ε, 1) met z*-toename -ε+2ε=ε $\rightarrow y_2=1$

$x_3 \leq 1$; $y_3=dz^*/db_2$: Bij $b_2=1+\varepsilon$ geldt x^*_{new} = (1/2-ε, 1, 1+ε) met z*-toename -ε+3ε=2ε $\rightarrow y_3=2$

$x_1+x_2+x_3 +x_7 = 2.5$; $y=dz^*/db_4$: Bij $b_4=2.5+\varepsilon$ wordt x^*_{new} = (1/2+ε,1,1) met z*-toename 1ε $\rightarrow y_4=1$

of C.S: (slackvar *shadowvar=0 ofwel voor max cx ,Ax≤b en min yb , yA≥c: $x_j(ya_j - c_j)=0$ & $y_i(b_i-a^ix)=0$)

Hier o.a. x4 * (y1+y4-1)=0 & y1 * (1-x1)=0

Dus $x_4=0.5 \rightarrow$ y1+y4=1

x1=0.5 → y1=0.

Dus met y1=0 en y4=1 resteert als duale

min y2 +y3 +2.5*1

y2+1≥2; y3+1≥3; y2,y3≥0. Conclusie: y*=(0,1,2,1)

Opgave 2. *(dit opgaveblad met uitwerking ingevuld terug inleveren)*

Beschouw het probleem

P: max $z = 1\,x_1 - 1\,x_2 + 2\,x_3$

onder $2\ x_1 - 2\,x_2 + 3\,x_3 = 5$

$1\ x_1 + 1\,x_2 - 1\,x_3 \le 3$

$1\ x_1 - 1\,x_2 + 1\,x_3 \le 2$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \in R$

D: min Z=5y1 + 3y2 + 2 y3

y1+ y2+ y3 ≥ 1

-2y1+y2- y3 ≥ -1

3y1 - y2+y3 =2

y1∈R, y2,y3≥0

a) Formuleer ernaast het duale probleem van P. **2punten**

b) De simplexmethode heeft variabelen x_4, x_5, x_6 toegevoegd, aan respectievelijk de 1e, 2e en 3e voorwaarde. Het optimale tableau is hieronder deels gegeven. Vul het aan tot een volledig tableau.

3 punten

			1	-1	2	-2	-m	0	0	√***voor c***	
		z	x1	x2	x3$^+$	x3$^-$	x_4	x_5	x_6	**met b1 ipv 5**	sol
c_B	z	1	2	0	0	0	1+**m**	1	0		8
-1	x_2	0	5	1	0	0	1	3	0	**b_1+9**	14
0	x_6	0	2	0	0	0	0	1	1	**5**	5
2	x^+_3	0	4	0	1	-1	1	2	0	**b_1+6**	11

c)Wat is de schaduwprijs van voorwaarde 1? Bereken het interval voor b_1^{new} waarbinnen ze exact geldig is.

Antwoorden: shadowprice y1=1 voor b1∈[-6,∞> **2.5 punten (1 punt voor uitleg)**

d)We voegen als extra voorwaarde toe: $6x_1 + x_2 \geq 15$. Heroptimaliseer hiervoor via de duale simplexmethode. **2.5punten**

		z	x1	x2	x3$^+$	x3$^-$	x_4	x_5	x_6	x7	sol
c_B	z	1	2	0	0	0	1+**m**	1	0	0	8
-1	x_2	0	5	1	0	0	1	3	0	0	14
0	x_6	0	2	0	0	0	0	1	1	0	5
2	x^+_3	0	4	0	1	-1	1	2	0	0	11
0.5 punt	x 7	0	-6	-1	0	0	0	0	0	1	-15
0.5 punt	**x7**	**0**	**-1(pivot)**	**0**	**0**	**0**	**1**	**3**	**0**	**1**	**-1**

x1 erin
voor x7

c_B	z	**1**									**6**
-1	x_2										**9**
0	x_6										**3**
2	x^+_3										**7**
1.5 punt	x 1	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**-1**	**-3**	**0**	**1**	**1**

Opgave 3a We formuleringen 2 modellen.

Het eerste model

Gebruikend de binaire variabelen

x_{ij} = 1/0 met uitkomst 1 als van town i (i=A,..,F) alle fires kan blussen in town j (j=A,..F) en 0 anders en y_i =1/0 met uitkomst 1 als in town i de station open blijft en 0 als ie gesloten wordt (i=A,..F)

We moeten regelen met linaire voorwaarden:

- Iedere town j heeft minstens één i met $x_{ij}=1$
- Als $x_{ij}=1$ dan $y_i=1$
- Als $x_{ij}=1$ dan $d_{ij}\leq 20$

en daarbij het aantal i's met $y_i=1$ minimaliseren.

Dus het model wordt: Min $\sum_i y_i$ onder

(1)	$\sum_i x_{ij} \geq 1$	(j=A,...,F)
(2)	$x_{ij}\leq y_i$	(i=A,..,F; j=A,..,F)
(3)	$d_{ij}\, x_{ij}\leq 20$	(i=A,..,F; j=A,..,F)
	$x_{ij},\ y_i \in\{0,1\}$	(i=A,..,F; j=A,..,F)

ipv (2) met 36 vwn is het ook mogelijk met 6 vwn te volstaan: $\sum_j x_{ij} \leq 6y_i$ (i=A,..,F)
en omdat de data d_{ij} bekend zijn is het
ipv (3) met 36 vwn is het ook mogelijk om met 14 vwn te volstaan: $x_{ij}=0$ (voor alle i,j met als $d_{ij}>20$)

3a) Het tweede model

Gebruikend alleen de binaire variabelen

y_i =1/0 met uitkomst 1 als in town i (i=A,..F) de fire station open blijft en uitkomst 0 als ie gesloten
en definieer daarbij *de coefficienten* e_{ij} als volgt

e_{ij} =1 als het vanuit i (i=A,..,F) mogelijk is om binnen 20 minuten naar j te rijden (j=A,..F)
=0 anders

We moeten regelen met lineaire voorwaarden:

- Iedere j kan door minstens één i met $y_i=1$ (en dus $e_{ij}=1$) worden bediend

Dan wordt nu het model: Min $\sum_i y_i$ onder

(1) $\sum_i e_{ij}y_i \geq 1$ (j=A,...,F)
$y_i \in\{0,1\}$ (i=A,..,F)

Het mag je verbazen dat het model nu door de geraffineerde definitie (e_{ij}) zo simpel is geworden.
Voor iedere i is er een set van towns j waar branden op tijd geblust kunnen worden

$$set_i=\{j \mid d_{ij}<20\ (\Leftrightarrow e_{ij}=1)\}.$$

Het gaat er eigenlijk om, om een minimal aantal sets (met $y_i=1$) te vinden waarmee alle towns j bestreken worden; daarom heet zo'n model een **set-cover model,** zie ook Hillier & Liebermann 12.4 example 3.

Opgave 3b) (Alleen formulering:) Min $14x_{AB}+ 19x_{Ac}+16x_{Ad}+ 12x_{EB}+ 16x_{EC}+\mathbf{M}x_{ED}$ onder

(1) $\sum_{j=B,C,D}x_{ij} \leq 3$ (i=A,E)
(2) $\sum_{i=A,E}x_{ij} \geq 2$ (j=B,C,D)