UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM

Amsterdam School of Economics

Tentamen Schade Actuariaat 1 18/01/2008, 9.30–12.30 u., A/C

Weging: elke opgave en elk onderdeel met aparte letter *(a), (b), … telt voor 1 punt.*

1. Laat zien dat als risico W cdf F heeft, dan $\mathrm{E}[W^2] = \int_0^\infty x^2\,\mathrm{d}F(x) = \int_0^\infty 2x[1-F(x)]\,\mathrm{d}x$.

   Gebruik hiertoe ofwel partiële integratie, ofwel Fubini: schrijf $x^2 = \int_0^x 2y\,\mathrm{d}y$ en verwissel de integratievolgorde.

2. Gegeven is een compound Poisson stochast $S = X_1 + \cdots + X_N$ met $\Pr[X_i = 1] = \Pr[X_i = 2] = \frac{1}{4}$ en $\Pr[X_i = 0] = \frac{1}{2}$.

   (a) Als verder $\mathrm{E}[N] = \lambda = 4$, gebruik dan Panjers recursierelatie $f(s) = \frac{1}{s}\sum_{h=1}^{s} \lambda h p(h) f(s-h)$ om de kans $\Pr[S \le 3]$ te berekenen.

   (b) Als $\mathrm{E}[N] = \lambda = 10$ geldt, bepaal dan met een op 3 momenten gebaseerde benadering de kans dat $S > \mathrm{E}[S] + 2\sqrt{\mathrm{Var}[S]}$.

3. Bezie functies van de vorm $p(x) = q\alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha x} + (1-q)\beta\,\mathrm{e}^{-\beta x}$, $x > 0$, en $p(x) = 0$ elders.

   (a) Laat zien dat $p(x)$ een kansdichtheid is als geldt $0 < \alpha < \beta$ en $0 \le q \le \frac{\beta}{\beta-\alpha}$.

   (b) Leg uit waarom het volgende stukje R pseudo-random trekkingen uit de dichtheid $p(x)$ oplevert, en bepaal de parameters daarvan:

```
set.seed(180108); n <- 1000
pp <- (runif(n)<0.5) * rexp(n) + rexp(n)/3
```

4. Voor een compound Poisson ruïneproces wordt de ruïnekans gegeven door $\psi(u) = \alpha\,\mathrm{e}^{-u}$, $u \ge 0$.

   (a) Wat is de *safety loading* θ in dit proces, als functie van α?

   (b) Bepaal de *adjustment coefficient* R, dus de wortel van $1 + (1+\theta)\mu_1 r - \mathrm{m}_X(r) = 0$.

   Gebruik eventueel de volgende gelijkheid: $\int_0^\infty \mathrm{e}^{ru}(-\psi'(u))\mathrm{d}u = \frac{1}{1+\theta}\frac{\theta(\mathrm{m}_X(r)-1)}{1+(1+\theta)\mu_1 r - \mathrm{m}_X(r)}$.

5. Neem aan dat de schade X die een verzekeraar gaat lijden uniform$(0,1)$ verdeeld is. Neem verder aan dat er twee mogelijke herverzekeringen bekeken worden, met uitkeringen $U = \frac{1}{4}X$ en $V = (X-d)_+$. De schades-eigen-rekening na herverzekering zijn respectievelijk $Y = X - U$ en $Z = X - V$. De retentie d is zodanig dat $\mathrm{E}[U] = \mathrm{E}[V]$ geldt.

   (a) Laat zien dat $d = \frac{1}{2}$. Teken de cdfs van X, Y en Z in één figuur.

   (b) Laat zien dat $\mathrm{Var}[Y] > \mathrm{Var}[Z]$. Gebruik bijvoorbeeld de in Opgave 1 bewezen gelijkheid, $\mathrm{E}[Y] = \int_0^\infty [1 - F_Y(y)]\,\mathrm{d}y$ en het teken van $(x-d)[F_Z(x) - F_Y(x)]$.

6. We hebben een steekproef $Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n$ ter grootte n uit een exponentieel(β) verdeling. Stel de loglikeihood op, en bepaal de meest aannemelijke schatting voor β door de afgeleide ervan te nemen en deze nul te stellen.