UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM

Amsterdam School of Economics

Tentamen Schade Actuariaat 1 — 20/06/2008, 9–12 u., A404

Weging: elke opgave en elk onderdeel met aparte letter *(a), (b), … telt voor* $1\frac{1}{4}$ *punt.*

1. Beschouw de volgende functie $u(w) = w(1-\alpha w)$. Voor welke w kan deze functie worden gebruikt als nutsfunctie? Is deze nutsfunctie dan *risico-avers*?

2. Gegeven is een compound Poisson stochast $S = X_1 + \cdots + X_N$ met $\Pr[X_i = 1] = \Pr[X_i = 2] = \frac{1}{2}$.

   (a) Als verder $\mathrm{E}[N] = \lambda = 5$, gebruik dan Panjers recursierelatie $f(s) = \frac{1}{s}\sum_{h=1}^{s} \lambda h p(h) f(s-h)$ om de kans $\Pr[S \leq 2.5]$ te berekenen.

   (b) Als $\mathrm{E}[N] = \lambda = 12$ geldt, bepaal dan met een op 3 momenten gebaseerde benadering de kans dat $S > \mathrm{E}[S] + 2.5\sqrt{\mathrm{Var}[S]}$.

3. Gegeven is een verzekeringsportefeuille met n onafhankelijke polissen. De op grond van polis $i = 1, 2, \ldots, n$ ingediende claims in een jaar bedragen X_i. Dit zijn identiek verdeelde stochasten met $\Pr[X_i = 0] = 0.92$, $\Pr[X_i = 1 \,|\, X_i \neq 0] = 0.75$ en $\Pr[X_i = 2 \,|\, X_i \neq 0] = 0.25$. De totaal uitbetaalde schade is dus $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Deze is opgebouwd uit N_1 betalingen ter grootte 1 en N_2 ter grootte 2, zodat $S = N_1 + 2N_2$. We benaderen S door $T = M_1 + 2M_2$, waarbij de M_i onafhankelijke Poisson stochasten zijn met $\mathrm{E}[M_i] = \mathrm{E}[N_i]$, $i = 1, 2$.

   (a) Wat zijn de marginale kansverdelingen van N_1 en N_2? Wat is de kansverdeling van $N_1 + N_2$? Laat zien dat N_1 en N_2 niet onafhankelijk zijn door aan te tonen dat $\Pr[N_1 = 0, N_2 = 0] \neq \Pr[N_1 = 0] \times \Pr[N_1 = 0]$.

   (b) De stochast T is een compound Poisson stochast. Laat dit zien door de mgf van T uit te rekenen. Wat zijn de specificaties van T als compound Poisson stochast?

4. Bezie het volgende stukje `R`-output, waarbij `rev` een vector omkeert, dus $(q_0, \ldots, q_{m-1})$ omzet in $(q_{m-1}, \ldots, q_0)$, en `cumsum` de cumulatieve sommen $(q_0, q_0 + q_1, \ldots, q_0 + q_1 + \cdots + q_{m-1})$ oplevert:

```
slps <- function (p) rev(cumsum(rev(1-cumsum(p))))
round(slps(dpois(0:3, .1)), 5)
```

   Ervan uitgaande dat voor $S \sim$ Poisson(0.1) geldt $\Pr[S > 3] = 0$, toon aan dat de resulterende getallen inderdaad de stop-loss premies zijn bij de Poisson(0.1) verdeling.
   Maak eventueel gebruik van de relatie $\mathrm{E}[(S-d)_+] = \sum_{x=d}^{\infty}[1 - F_S(x)]$.

5. Veronderstel dat voor een compound Poisson risicoproces bekend is dat het verwachte aantal schades per jaar gelijk is aan 1; de schadebedragen $X_i \sim X$ hebben dichtheid $f_X(x) = \frac{1}{9}\, 3\,\mathrm{e}^{-3x} + \frac{8}{9}\, 6\,\mathrm{e}^{-6x}$, $x > 0$. Verder is bekend dat de *adjustment coefficient* R, dat wil zeggen de oplossing in $(0, \infty)$ van de vergelijking $1 + (1+\theta)\,\mathrm{E}[X] r = \mathrm{m}_X(r)$, gelijk is aan 2.

   (a) Bepaal welke veiligheidsopslag θ op de premie wordt gehanteerd.

   (b) Leid een exacte uitdrukking af voor de ruïnekans $\psi(u)$ voor dit proces bij beginkapitaal $u \geq 0$. Gebruik hierbij de volgende gelijkheid, die u niet hoeft te bewijzen:

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{ru}(-\psi'(u))\,\mathrm{d}u = \frac{4}{9}\,\frac{10-3r}{(r-2)(r-4)}, \qquad r < 2.$$

   Verifieer of de door u gevonden waarde voor $\psi(0)$ klopt.