Universiteit van Amsterdam

Amsterdam School of Economics

Tentamen Schade Actuariaat 1 30/10/2008, 14–17 u., IWO Rood

Weging: elke opgave en elk onderdeel met aparte letter *(a), (b), ... telt voor 1 punt.*

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven en 2 pagina's!

1. Gegeven is dat een bepaalde beslisser een exponentiële nutsfunctie hanteert met risico-aversie $\alpha > 0$. Verder is gegeven een risico X, met $\mathrm{Var}[X] > 0$, waartegen deze beslisser zich wil laten verzekeren.

   (a) Bepaal de maximale premie die hij bereid is te betalen voor het verzekeren van X.

   (b) Laat zien dat de premie die hij wil betalen voor verzekeren van het dubbele risico $2X$ meer dan twee maal de maximale premie voor X is.

2. Gegeven is een compound Poisson stochast S met specificaties λ en $p(0,1,2,3) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

   (a) Leg de werking uit van het Sparse Vector algoritme om de kansverdeling van S uit te rekenen. Geef ook aan op grond waarvan dit de juiste uitkomsten geeft.
   Waarom heet het algoritme eigenlijk 'Sparse vector'?

   (b) Als nader gegeven is $\lambda = 4$, gebruik dan Panjers recursie $f(s) = \frac{1}{s}\sum_{h=1}^{s} \lambda h p(h) f(s-h)$ om de stop-loss premie $\mathrm{E}[(S-2.5)_+]$ te berekenen.

   (c) Als in plaats daarvan geldt $\lambda = 40$, benader dan $\Pr\left[S > \mathrm{E}[S] + \sqrt{\mathrm{Var}[S]}\right]$ met de Centrale Limiet Stelling. Zou gebruik van de Normal Power benadering tot een groter, kleiner of hetzelfde resultaat geleid hebben?

3. Gegeven is de volgende output van R om de adjustment coefficient van een zeker ruïneproces uit te rekenen:

```
> theta <- ...; mu1 <- ...;
> f <- function(r) 1 + (1+theta) * mu1 * r - 1/(1-r)
> uniroot(f, c(.1,1))$root
[1] 0.499999
```

   Wat moet er op de puntjes worden ingevuld als waarde voor `mu1`? Leg uit waarom.
   Wat moet er als waarde voor `theta` worden genomen opdat de uitkomst van de berekening inderdaad `0.5` is?

4. Gegeven is dat een bepaalde groep automobilisten claims indient volgens een Poisson proces, met intensiteit λ. Schrijf $N(t)$ voor het aantal claims tot tijd t.

   (a) Conditioneel gegeven het verloop van het proces $N(s), s \leq t$, tot tijdstip t, en voor getallen $t > 0$, $h > 0$, wat geldt er voor het increment van het proces tussen t en $t+h$?

   (b) Als de stochast Y_i het aantal claims aangeeft voor automobilist i, $i = 1, \ldots, n$, en deze automobilist mogelijkerwijs niet het gehele jaar verzekerd was maar slechts een gegeven periode ter lengte w_i daarvan, $0 < w_i \leq 1$, bepaal dan de maximum likelihood schatter voor de intensiteit λ.

Vergeet Opgave 5 niet!

5. Voor een zeker bonus-malussysteem met 2 klassen proberen we de Loimaranta efficiency $e(\lambda) = \lambda b'(\lambda)/b(\lambda)$ bij $\lambda = 0.1$ te schatten, waarbij $b(\lambda)$ de *steady-state premium* voorstelt, en λ de schadefrequentie, dus het verwachte aantal schades per jaar. Dat aantal wordt Poisson verondersteld.
We gebruiken hiervoor het volgende R-programma:

```
BM.frac <- c(1.5,1)
b <- c(0,0); lbs <- c(0.0999, 0.1001)
for (i in 1:2)
{ p0 <- exp(-lbs[i])
  P1 <- rbind(c(1-p0,p0), c(1-p0,p0))
  P100 <- P1; for (k in 1:100) P100 <- P100 %*% P1
  l <- P100[2,]  ## tweede rij van matrix P100
  b[i] <- sum(l*BM.frac)
}
```

(a) `P1` is de matrix met éénjarige overgangskansen. Wat is de interpretatie van de elementen van de matrix `P100`? Hoe ziet deze matrix er in dit geval uit?

(b) Welke R uitdrukking geeft dan een benadering voor de Loimaranta efficiency? Leg uit.