Universiteit van Amsterdam

Amsterdam School of Economics

Tentamen Schade Actuariaat 1 — 26/01/2007, 9.30-12.30 u., D/A

Weging: elke opgave c.q. elk onderdeel met aparte letter *(a), (b), … levert maximaal 1 punt op.*

1. Van een bepaald compound Poisson ruïneproces is bekend dat de ruïnekans bij een bepaald groot beginkapitaal u_0 gelijk is aan $\psi(u_0) = \varepsilon$.
   - Bepaal een bovengrens voor de *adjustment coefficient* R.
   - Als verder voor beginkapitaal $u_0 + 1$ deze kans gelijk is aan 0.9995ε, bepaal dan ook een benaderde waarde voor R.

2. Op een bepaald verkeersplein is de grootheid 'verkeersdruk' Λ een stochast met een Gamma(α, β) verdeling. Gegeven dat de verkeersdruk Λ op een bepaalde dag de waarde λ heeft, volgt het aantal dodelijke ongevallen N op het verkeersplein op die dag een Poisson(λ) verdeling. Schrijf $\mu = \mathrm{E}[N]$ en $\sigma^2 = \mathrm{Var}[N]$.
   (a) Laat zien dat $\sigma^2 > \mu$ geldt.
   (b) Als $\mu = 0.01$ en $\sigma^2 = 0.012$, wat zijn dan α en β?

3. Een bepaalde verzekerde, met een exponentiële nutsfunctie met risico-aversie α, heeft een Poisson(λ) verdeeld aantal ongevallen per jaar. De schade bij elk ongeval is onafhankelijk, ook van het aantal, en volgt een uniform($0, b$) verdeling.
   Laat zien dat premie die de verzekerde bereid te betalen om dit risico aan een verzekeraar over te dragen, evenredig is met λ, maar niet met b.

4. Gegeven is een verzekeringsportefeuille met n onafhankelijke polissen. De op grond van polis $i = 1, 2, \ldots, n$ ingediende claims in een jaar bedragen X_i. Dit zijn identiek verdeelde stochasten met $\Pr[X_i = 0] = 0.96$, $\Pr[X_i = 1 \mid X_i \neq 0] = 0.75$ en $\Pr[X_i = 3 \mid X_i \neq 0] = 0.25$. De totaal uitbetaalde schade is dus $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Deze is opgebouwd uit N_1 betalingen ter grootte 1 en N_2 ter grootte 3, zodat $S = N_1 + 3N_2$. We benaderen S door $T = M_1 + 3M_2$, waarbij de M_i *onafhankelijke* Poisson stochasten zijn met $\mathrm{E}[M_i] = \mathrm{E}[N_i]$, $i = 1, 2$.
   (a) Wat zijn de marginale kansverdelingen van N_1 en N_2? Laat zien dat deze twee stochasten *niet* onafhankelijk zijn.
   (b) Wat voor type kansverdeling heeft T? Geef ook de specificaties ervan.
   (c) Als $n = 50$ en $d = 2.5$, benader dan de stop-loss premie $\mathrm{E}[(T - d)_+]$. Gebruik zo mogelijk Panjer's recursie: $f(s) = \frac{1}{s}\sum_{h=1}^{s} \lambda h p(h) f(s-h)$.
   (d) Als $n = 500$, gebruik dan de NP-benadering om d zodanig te bepalen dat de kans dat T de waarde d overschrijdt, ongeveer 2.5% is.

5. Veronderstel dat voor een compound Poisson risicoproces bekend is dat het verwachte aantal schades per jaar gelijk is aan 1; de afzonderlijke schades $X_i \sim X$ hebben als dichtheid $f_X(x) = \frac{1}{9}\, 3\,\mathrm{e}^{-3x} + \frac{8}{9}\, 6\,\mathrm{e}^{-6x}$, $x > 0$. Verder is bekend dat de *adjustment coefficient* R, dat wil zeggen de oplossing in $(0, \infty)$ van de vergelijking $1 + (1+\theta)\,\mathrm{E}[X] r = \mathrm{m}_X(r)$, gelijk is aan 2.
   (a) Bepaal welke veiligheidsopslag θ op de premie wordt gehanteerd.
   (b) Leid een exacte uitdrukking af voor de ruïnekans $\psi(u)$ voor dit proces bij beginkapitaal $u \geq 0$. Gebruik hierbij de volgende gelijkheid, die u niet hoeft te bewijzen:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{ru}(-\psi'(u))\,\mathrm{d}u = \frac{4}{9}\,\frac{10 - 3r}{(r-2)(r-4)}, \qquad r < 2.$$

   Verifieer of de door u gevonden waarde voor $\psi(0)$ klopt.