UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM

Amsterdam School of Economics

Tentamen Schade Actuariaat 1 **03/11/2006, 9.30-12.30 u.**

Weging: elke opgave c.q. elk onderdeel met aparte letter levert maximaal 1 punt op.

1. Een beslisser heeft een exponentiële nutsfunctie met risico-aversie $\alpha > 0$.

   (a) Laat zien dat de maximale premie die hij bereid is te betalen om zich te verzekeren tegen een verlies X is gelijk aan $\pi[X] = \frac{1}{\alpha}\log \mathrm{E}[\mathrm{e}^{\alpha X}]$.

   (b) Laat zien dat deze premie voldoet aan $\pi[2X] > 2\pi[X]$ als $\mathrm{Var}[X] > 0$.

2. Laat $N \sim$ geometrisch(p) en $X_i \sim \chi^2(2)$, $i = 1, 2, \ldots$, onafhankelijke stochasten zijn.

   (a) Wat is de verdeling van $\frac{1}{2}X_i$?
   Laat zien dat de momenten genererende functie bij $S = \frac{1}{2}(X_1 + X_2 + \cdots + X_N)$ te schrijven valt als een mengsel van ~~die bij~~ een exponentiële verdeling en ~~die bij~~ een stochast die de waarde 0 met kans 1 aanneemt.
   van

   (b) Geef ook een eenvoudige uitdrukking voor de stop-loss premies bij S bij eigen behoud $d > 0$.

3. De 1000 medewerkers van een bepaalde instelling kunnen een beroep doen op een bepaalde verzekering. De helft heeft 1 als verzekerd bedrag, de andere helft 2. De claimkans voor beide is 1% per jaar, en alle claims zijn stochastisch onafhankelijk. Schrijf S voor het totale claimbedrag.

   (a) Bepaal met de NP-benadering het 95%-kwantiel: die s waarvoor geldt dat $\Pr[S > s] \approx 5\%$.

   (b) Als het aantal medewerkers niet 1000 maar 60 is, bepaal dan hetzelfde kwantiel als hierboven, maar nu door S te benaderen met een *collectief* model en gebruik te maken van Panjers recursiebetrekking $f(s) = \frac{1}{s}\sum_{h=1}^{s} \lambda h p(h) f(s-h)$, $s = 1, 2, \ldots$

exp(5/3)

4. In een bepaald ruïneproces geldt:

   $1 + cr = m_X(r)$
   $1 + (1+\theta)r = m_X(r)$

   - de jaarlijkse premie gelijk is aan $c = 3\lambda$;
   - de intensiteit van het claimaantal proces is λ;
   - de individuele schades ontstaan als $X_i = Y_i + \frac{3}{4}Z_i$, waarbij Y_i, Z_i, $i = 1, 2, \ldots$, onafhankelijke exponentieel(1) verdeelde stochasten zijn.

   (a) Laat zien dat de bekend veronderstelde relatie voor de ruïnekans $\psi(u)$ bij beginkapitaal u

   $$\int_0^\infty \mathrm{e}^{ru}(-\psi'(u))\,\mathrm{d}u = \frac{1}{1+\theta}\,\frac{\theta(\mathrm{m}_X(r) - 1)}{1 + (1+\theta)\,\mu_1 r - \mathrm{m}_X(r)} \qquad (*)$$

   $\Rightarrow (*)$ breuk naar ∞
   ∞ bij r invullen

   voor dit geval overgaat in $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{ru}(-\psi'(u))\,\mathrm{d}u = \frac{5}{8}\,\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - r} - \frac{1}{24}\,\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3} - r}$.

   (b) Bepaal voor deze situatie de adjustment coefficient R, die gedefinieerd is als de positieve wortel van $1 + (1+\theta)\,\mu_1 r = \mathrm{m}_X(r)$, zie ook de noemer van $(*)$.

   (c) Bepaal $\psi(u)$ met behulp van de gegeven relatie. Verifieer of uw uitkomst voldoet aan $\psi(0) = \dfrac{1}{1+\theta}$, en ook of er geldt dat $\displaystyle\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{\mathrm{e}^{-Ru}} = c_0$ voor een zekere $c_0 \in (0, 1)$.

   (d) Laat zien dat in de limiet voor $r \downarrow 0$, de gelijkheid $(*)$ overgaat in de bekende gelijkheid $\psi(0) = \dfrac{1}{1+\theta}$.
   Hint: gebruik $\mathrm{m}_X(r) = 1 + \mu_1 r + O(r^2)$ in het rechterlid van $(*)$. Of gedenk l'Hopital.

$m_X(r) = 1 + EXr + EX^2\frac{r^2}{2!} + \ldots$

$m'_X(0) = EX = \mu$